INDEX

فهرست

شناسایی سیستم

استاد: دکتر بابازاده

mebab@znu.ac.ir

Lennart Ljung; System identification Theory for the users.

Oliver Nells, Nonlinear system identification.

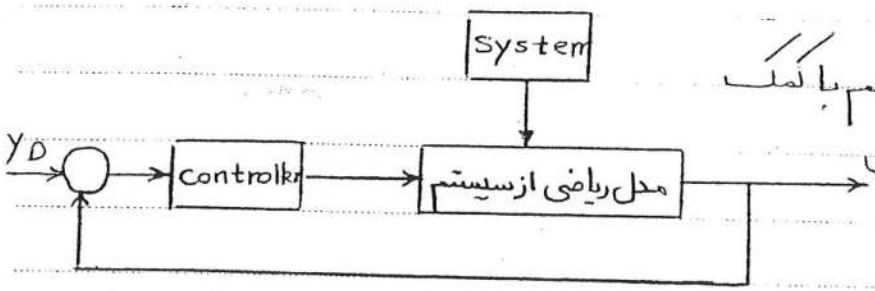
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

شناسایی سیستم: جلسه اول

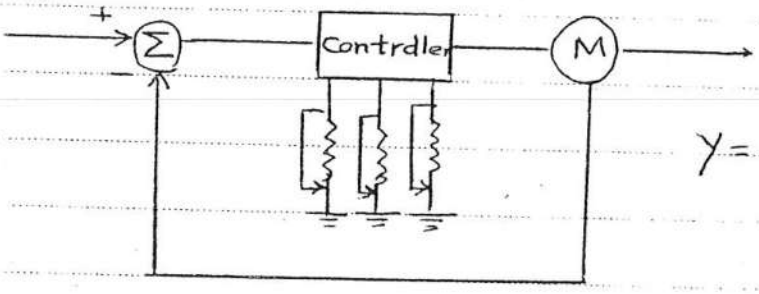
Lennart Ljung system Identification.
Theory for the users.
oliver Nells, Nonlinear system Identification.
Mehbab @ znu.ac.ir

شناسایی: داشتن تقریب ازسیستم



بدون دست زدن به سیستم با کمک مدل ریاضی کنترل کننده طراحی می کنیم

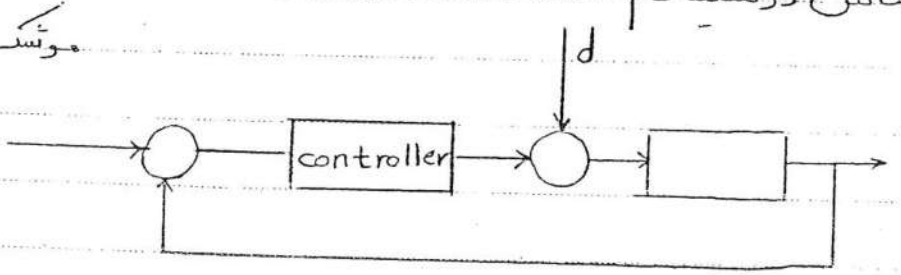
پیش بینی کردن:



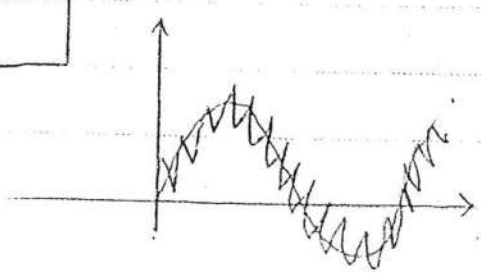
$y = f(x, z, t, M, \dots)$

پیش بینی اغتشاش درسیستم : disturbance

موشک

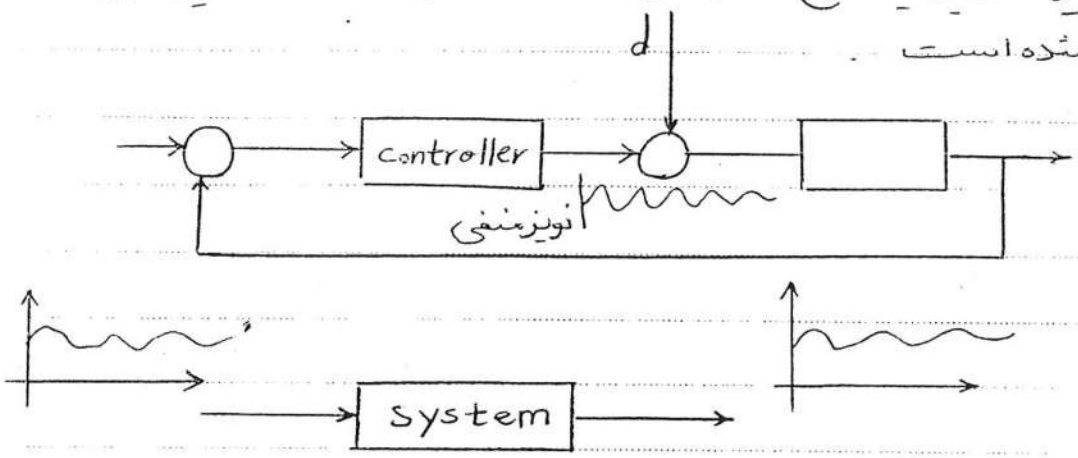


هدف هم اغتشاش می‌شود



Subject:
Year. Month. Date. ( )

پیش بینی نویز: نویز یک نوع آشفتگی است. در مخابرات نویز منفی پیش بینی شده است.



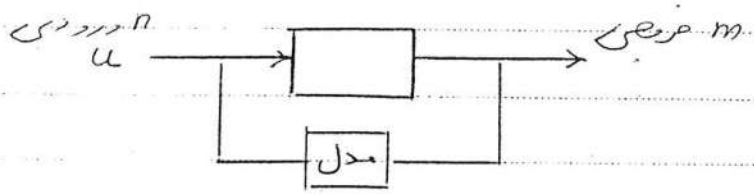
۱- مدل آزمایشگاهی
۲- مدل ذهنی و زبانی
۳- مدل ریاضی

white box
black box
gray box

۱- سیستم گسسته و پیوسته
سیستمهای دیجیتال گسسته است.
۲- بدون حافظه، حافظه دار
↓
سیستم دینامیک

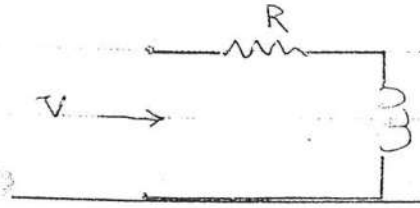
$$y(t) = f(u(t), y(t-1))$$

۴- SIMO, MIMO, MISO, SISO



۴- تغییرپذیر با زمان

۵- خطی



$$\frac{V}{I} = R + sL$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۶. علّی ، به گذشته و حال وابسته ، غیرعلّی به آینده وابسته است .

۷. سیستم های فشرده ← معادلات دیفرانسیل معمولی
سیستم های غیرفشرده ← معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی .

روشهای شناسایی : ۱. off_line
۲. on_line
recursive

Subject:

Year. Month. Date. ( )

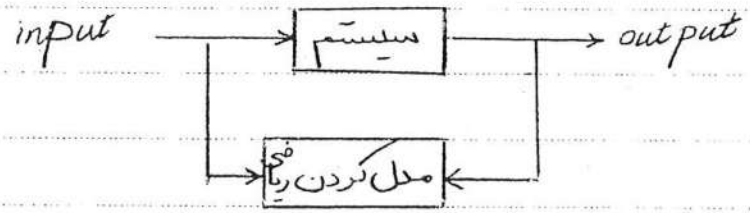
جلسه دوم :

System Identification:

1. Estimation تخمین

2. Prediction پیش بینی

انواع مدل کردن های سیستم :



براساس ورودی، خروجی و روابط معادلات دیفرانسیل مدل را استخراج می کنیم.

توجه : سیستم هایی که خروجی به ورودی و گذشته های ورودی و خروجی بستگی داشته باشد، سیستم دینامیکی یا حافظه دار می باشد. در اینصورت باید از روش های شناسایی برای مدلینگ سیستم استفاده کرد.

$$y(t) = f(u_t, u_{t-1}, \dots, y(t-1), y_{t-2}, \dots)$$

Black box modelling ⟵ در سیستم هیچ چیز معلوم نیست (آزمایشی)

white box modelling ⟵ در سیستم پارامترها مشخص است (تحلیلی)

Gray box modelling ⟵ ترکیب دو روش بالا

Subject :
Year . Month . Date : :

uncertainity : نامعینی : براثر وجود نویز و یا از خود سیستم و فضای پیرامون سیستم ورودی و خروجی در هر لحظه با دفعات قبلی فرق می کند و هنر شناسایی سیستم این است که با وجود نامعینی و نویز بتوان مدلی را برای سیستم استخراج کرد.

روش های شناسایی :

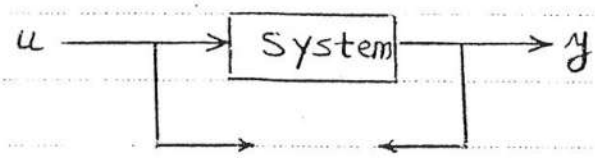
off line
۱- روش های کلاسیک شناسایی
۲- روش های یکباره
۳- روش های تکراری
online ← ۴- روش های بازگشتی

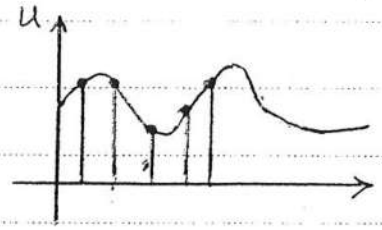
۱- روش های کلاسیک شناسایی :
این روش وقتی موثر است که نویز نداریم و بصورت تقریبی است

۲- روش های یکباره : روشی است که ما یک بار از ورودی و خروجی سیستم نمونه برداری می کنیم و در لحظات نشان داده شده از ورودی و خروجی درباره نمونه برداری می کنیم و آنها را بصورت بردار نمایش می دهیم و با استفاده از روش هایی که گفته خواهد شد مدل ریاضی را از نمونه ها بدست می آوریم.
مثلاً با استفاده از روش های Ordinary least square (روش مینیمم مربعات خطا)

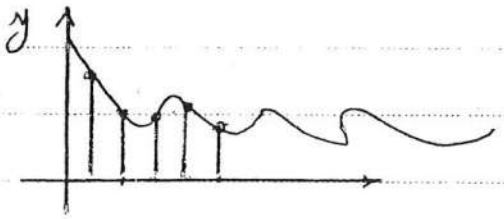
Subject:

Year. Month. Date. ( )





$$u = [u_0, u_1, \dots u_m]$$



$$y = [y_0, y_1, \dots, y_n]$$

$$\frac{y}{u} = \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}}$$

→ مدل ریاضی معمول

بدست می‌آید. $b_0, b_1, \dots, b_m$ → با استفاده از روش ordinary least square

$a_1, a_2, \dots, a_n$

توجه: روش یکباره برای وقتی است که نویز سفید داشته باشیم.

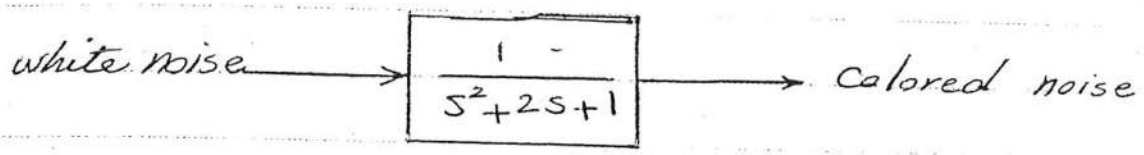
نویزها:

نویز سفید white noise: میانگین نویز صفر است و مقادیر آن به لحظات گذشته نویز وابسته نیست.

نویز رنگی colored noise: میانگین نویز می‌تواند صفر باشد یا نه و مقادیر آن به لحظات گذشته نویز بستگی دارد.

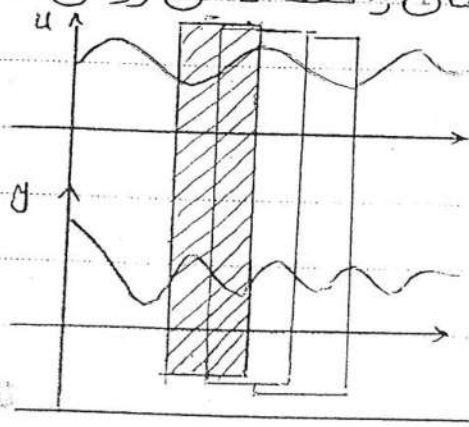
Subject :
Year . Month . Date . ( )

نکته : اگر نویز سفید را از یک تابع تبدیل دینامیکی که به مقادیر گذشته‌اش وابسته است عبور دهیم درخروجی نویز رنگی دریافت خواهیم کرد.



۳- روش تکراری : مانند روش محاسبات عددی تکراری است. ابتدا یکبار از ورودی و خروجی نمونه برداری کرده و مانند روش یکباره پارامترهای a_0 تا a_n و b_0 تا b_m را بدست می آوریم، y محاسباتی را با y واقعی مقایسه کرده و خطای مشخص شده را با چند بار تکرار همین روش از بین می بریم. روش تکراری برای نویزهای رنگی هم جوابگو است.

۴- روش های بازگشتی :
دراین روش یک frame از ورودی و خروجی را انتخاب می کنیم (قسمتی یا محدوده ای از ورودی و خروجی انتخاب می شود) و بعد از اندازه گیری نمونه ها به جلو می رویم و دوباره آن را اندازه می گیریم و مثلاً ۱۰۰ واحد از نمونه ها این کار را انجام می دهیم و پارامترها را بدست می آوریم.
مزیت این روش این است که علاوه براینکه با نویز رنگی هم کار می کند، سیستم های متغیر با زمان را فقط با این روش شناسایی می کنند. این روش کاملتر است.



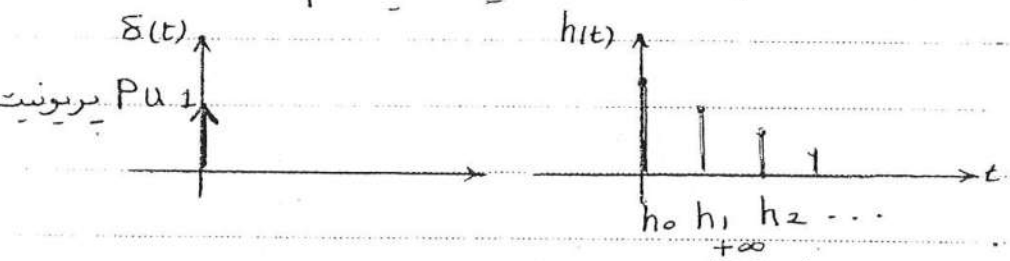
Subject:
Year. Month. Date.

روش های کلاسیک : نویز وجود ندارد - سیستم خطی و نامتغیر با زمان LTI است و اولین کاری که برای روش های کلاسیک باید انجام شود معلوم شدن نوع سیستم است.

گسسته : ← LTI ← $\delta(t) \rightarrow$ [sys] $\rightarrow h(t)$

پیوسته : $h \rightarrow H(z)$

روش تجربی ۱ - اعمال ورودی ضربه برای شناسایی سیستم . مثال :



پریونیت

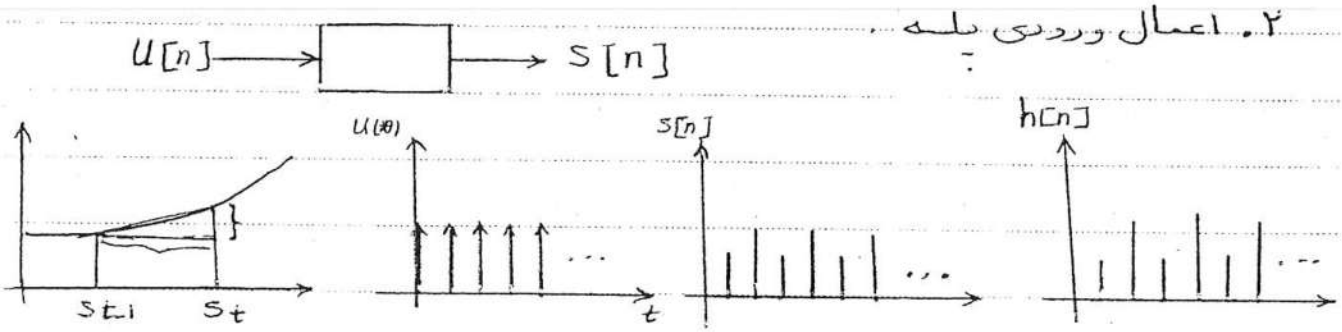
علی ریاپدار

$h(t)$ را بدست می آوریم .

$$y(t) = h(t) * x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{t-k}$$

$H(z)$ را با تبدیل z بدست می آوریم

۲. اعمال ورودی پله .



هدف بدست آوردن $h(n)$ ، $H(z)$ است که با بدست آوردن $S[n]$ با رابطهٔ زیر $h[n]$ بدست می آید .

$$h[n] = S[n] - S[n-1]$$

$$= \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 - S_0 \\ \vdots \\ S_N - S_{N-1} \end{bmatrix} \Rightarrow h[n] \rightarrow H(z)$$

Subject:

Year. Month. Date.

۳. ورودی دلخواه و خروجی را داریم :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m} h_k \cdot x_{t-k} = h_0 x_t + h_1 x_{t-1} + \cdots + h_m x_{t-m}$$

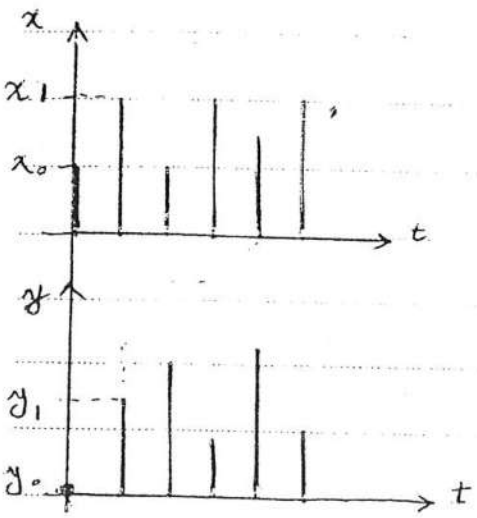
$t = 0, 1, 2, \ldots \Rightarrow$

$t_k = 0 \rightarrow y_0 = h_0 x_0 \longrightarrow$ معلوم h_0

$t = 1 \longrightarrow y_1 = h_0 x_1 + h_1 x_0 \longrightarrow$ معلوم h_1

$\vdots$

$t = m \longrightarrow y_m = h_0 x_m + h_1 x_{m-1} + \cdots + h_m x_0$



$h[n]$ بدست می آید. اشکالی که به سیستم وارد می شود که آن هم بدست آمدن مدل تقریبی است.

روش جدید شناسایی ارائه شده توسط استاد:

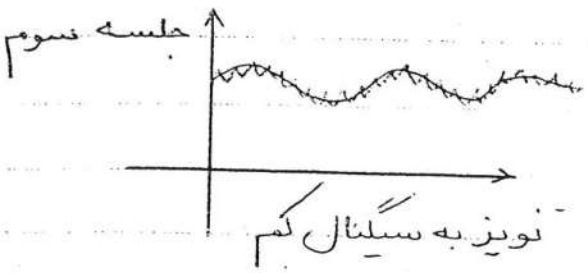
FIA (Floating Input Approach)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

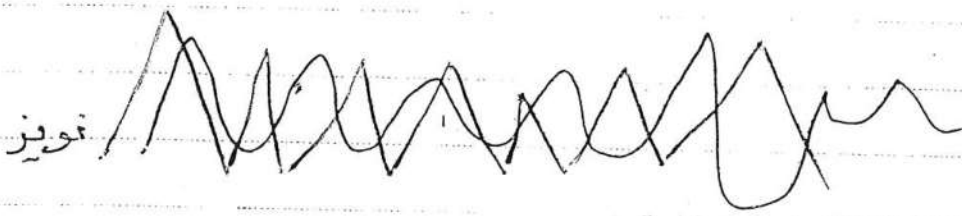
Subject:

Year. Month. Date. ( )



نویز بی اهمیت می توان صرفنظر کرد.

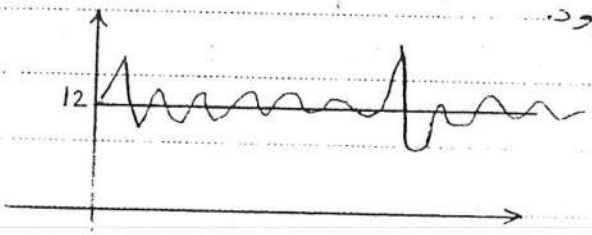
پاسخ سیستم:



فرکانس نویز و پاسخ سیستم نزدیک به هم است.

روشهای کلاسیک تحت شرایطی که نویز قابل صرفنظر است.

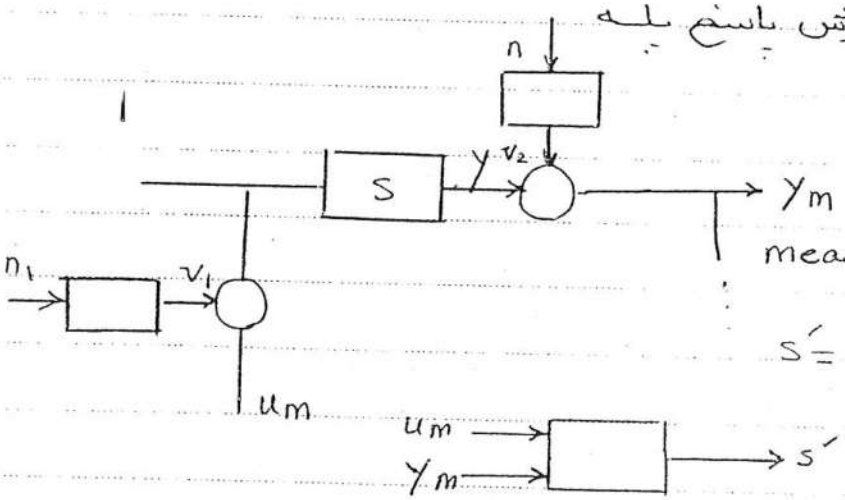
نویز از سیستم (۲) چطور جدا شود.



روش های حوزه زمان: روش پاسخ ضربه

روش پاسخ پله

روش حوزه فرکانس:



می خواهیم بگوئیم $S' = S$

در واقعیت اگر نویز نباشد تحت شرایط خاص {سیستم خطی نامتغیر با زمان و مرتبه سیستم = مرتبه پیش بینی شده} ما باشد...

$S = S'$ مدل روش کلاسیک

Subject:

Year. Month. Date. ( )

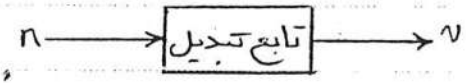
$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{[b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}]\, z^{-d}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

تاخیر

$$= \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}$$

n نویز سفید

v نویز رنگی



در حوزه فرکانس e^{-Tds} تاخیر را نشان می دادیم :

$$k\,\frac{s+5}{s^2+6s+9}\,e^{-Tds}$$

d تقریباً در همه سیستمها وجود دارد

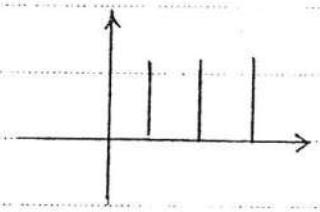
(1)

$$b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \dots + b_n x_{t-m} = a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + \dots + a_n y_{t-n}$$

بدون لحاظ کردن تاخیر

If $b_0 = 0$, $b_1 = 0$ $\longrightarrow$ $b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m} = z^{-2}[b_2 + \dots + b_m z^{-m}]$

$$b_0 x_t = a_0 y_t$$



لحظه صفر ← قبل چیزی نداشتیم

$$a_0 x_t = a_0 y_t$$

$$a_0 = 1$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

صورت و مخرج در رابطه (1) به a_0 تقسیم می‌شود

$$\frac{c_0}{1}\ \frac{\left(\frac{b_0}{a_0}\right) + \frac{b_1}{a_0} z^{-1} + \dots + \frac{b_m}{a_0} z^{-m}}{\left(\frac{a_0}{a_0}\right) + \left(\frac{a_1}{a_0}\right) z^{-1} + \dots + \frac{a_n}{a_0} z^{-n}} = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + \dots}{1 + d_0 z^{-1} + \dots}$$

تعداد پارامترهای مجهول تابع تبدیل $= m + n + 1$

بلیشم (عدد تعیین کننده مهم)

Subject :

Year. Month. Date. ( )

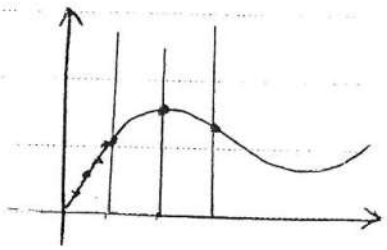
برای شناسایی چنین سیستمی که نویزی در آن نیست

(مقدار زداده) $\Rightarrow P = m + n + 1$

برای شناسایی سیستم احتیاج داریم . پس لازم نیست ۱۰۰۰۰ داده برداریم

یک دستگاه P معادله P مجهول می نویسیم همه ضرایب بدست می آید.

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \equiv \text{(DC Motor)}$$

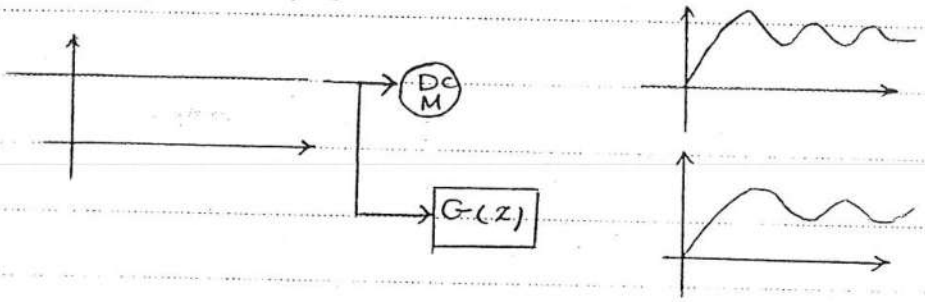


$P = m + n + 1 = 3$

سه تا اطلاعات باید داده شود.

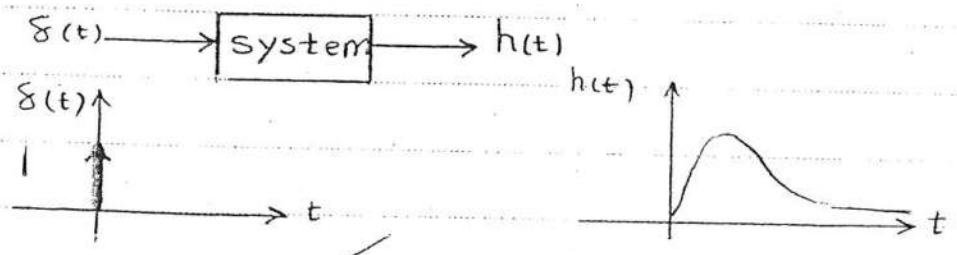
$$\frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}$$

اگر تابع تبدیل را بالاتر می گرفتیم دقیق تر بود.



$$error = y_{act} - y_{sim}$$

نکته : سیستم مرتبه بالا معلوم به فناست . مرتبه سیستم واقعی خیلی نمی تواند بالا باشد درعمل Fail می شود.



درعمل ممکن نیست . درلحظه صفر مقدار ∞ به یک موتور بدهیم .

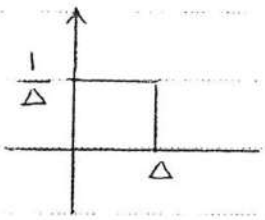
1000,000 V

Subject:

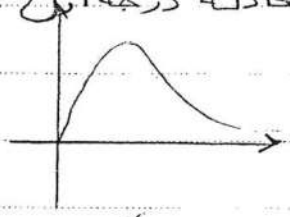
Year. Month. Date.

$h(t) \xrightarrow[\text{لاپلاس}]{\text{تبدیل}} H(s)$

$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta}$



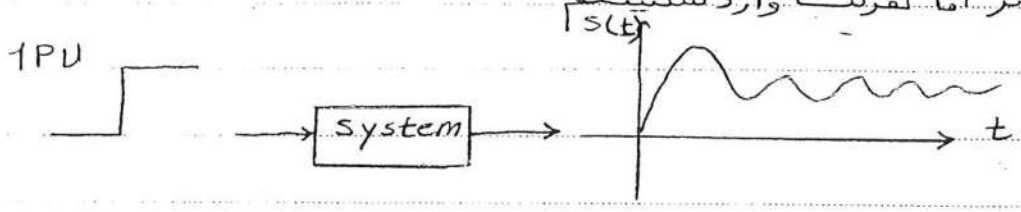
معادله درجه اول:



هرچه Δ کم دامنه خیلی بزرگ

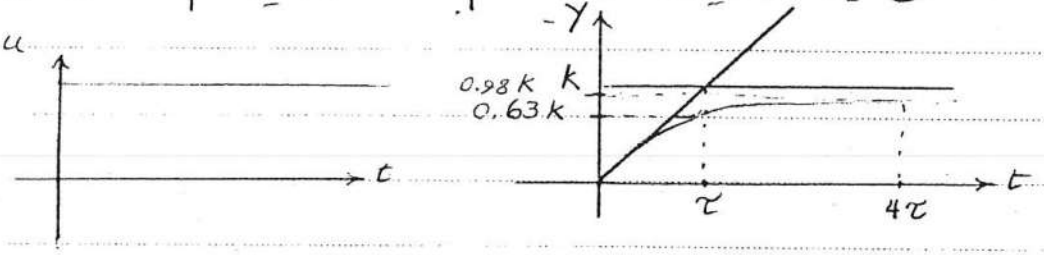
$k \cdot \frac{1}{\Delta} \rightarrow$ system $\rightarrow k.h(t)$

ورودی کوچکتر اما تقریب وارد سیستم



$\frac{d}{dt} \rightarrow h(t)$

مشتق گیر اگر نویزی در سیستم باشد از نویز هم مشتق می گیرد.

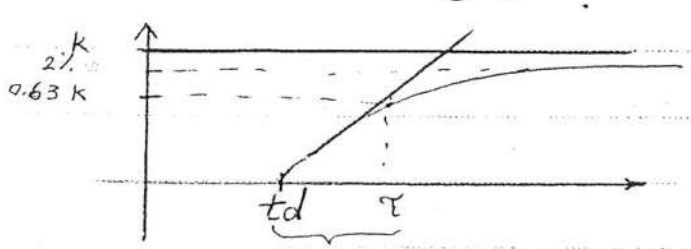


$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$

اگر k, τ را بدست بیاوریم سیستم شناسایی شده است.

$k = y_{ss}$ = مقدار ماندگار سیستم. k مقدار نهایی سیستم است

$\tau =$ ثابت زمانی



اخیر $G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} e^{-T_d s}$

سیستم بدون تاخیر

$t = \tau \rightarrow s(\tau) = k(1 - e^{-\tau}) = 0.63k$

$t = 2\tau \Rightarrow s(2\tau) = k(1 - e^{-2}) = 0.84k$

$t = 4\tau \rightarrow s(4\tau) = 0.98k$

Subject:
Year. Month. Date.

معادله درجه ۲ :

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

ζ : نسبت میرایی

α : ضریب میرایی

ω_n : فرکانس طبیعی میراشونده

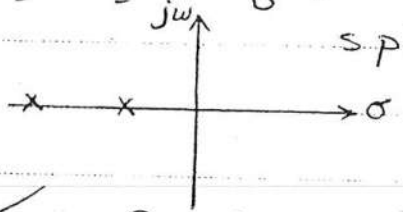
ω_d : فرکانس طبیعی میراشونده

β : زاویه میرایی

حالتهای مختلف پاسخ پله سیستم مرتبه ۲ :

۱. خوق میرا over damped

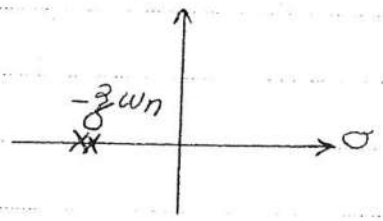
$\zeta > 1$: دوریشه حقیقی



$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

۲. میرایی بحرانی : critically damped

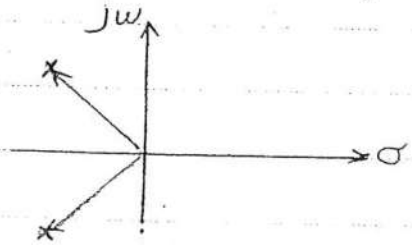
$\zeta = 1$: ریشه مکرر حقیقی



$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n$$

۳. زیرمیرا under damped $\zeta < 1$: $0 < \zeta < 1$

اگر قطبها روی محور jw باشد سیستم فقط نوسان دارد.

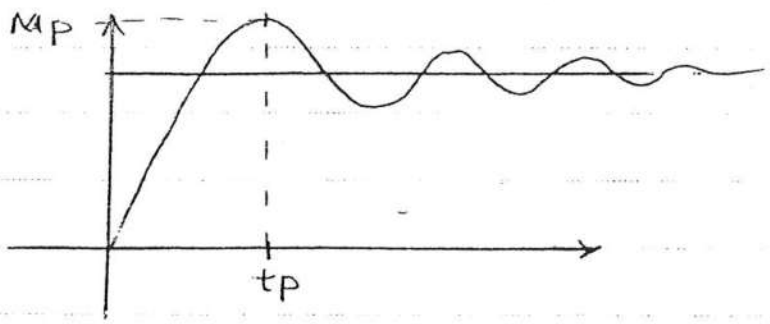


$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$\alpha = -\zeta\omega_n$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



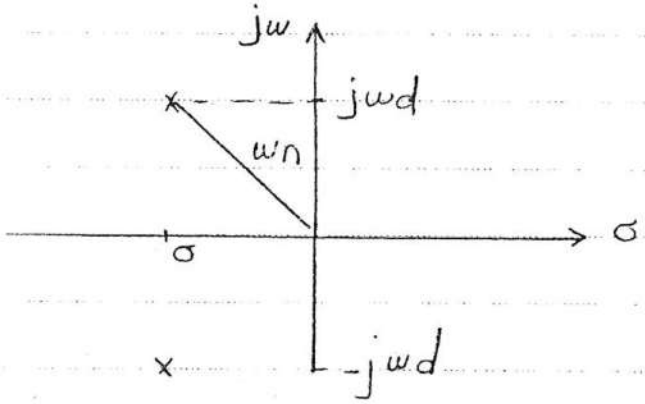
$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{Y}{U} \rightarrow U = \frac{1}{s} \text{ پله}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$ تجزیه به کسرهای جزئی و بعد تبدیل لاپلاس

$$y(t) = h^{-1}[y(s)] = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \cos^{-1}\zeta)$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \qquad \sigma = \zeta\omega_n \qquad \zeta < 1$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\omega_d}{\sigma} = \cos^{-1}\zeta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$



اگر درمعادله درجه ۲ (درسیستم حلقه بسته) چون قطب ها دوست دارند به سمت صفر بروند، اگر صفر سمت راست باشد امکان ناپایداری وجود دارد ولی اگر سمت چپ باشد پایداری ماند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین - اثبات کنید: محاسبه t_s ، t_r با فرض باند 2%

t_s : مدت زمانی است که مقدار خروجی به 98% مقدار نهایی می رسد:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi w_n}$$

t_r : مدت زمانی است که خروجی برای اولین بار به مقدار نهایی خود برسد:

$$t_r = \frac{\pi - \varphi}{w_d}$$

t_p : زمانی است که پاسخ به ماکزیمم خود برسد

$$t_p = \frac{\pi}{w_d}$$

پاسخ سیستم : $y(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(w_d t + \varphi)$

$$y(t) = 1 - e^{-\xi w_n t}\left[\cos w_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin w_d t\right)$$

$$y(t_r) = 1 = 1 - e^{-\xi w_n t_r}\left[\cos w_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin w_d t_r\right) = e^{-\sigma t_r} \neq 0$$ چون

$$\cos w_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin w_d t_r = 0$$

$$\tan w_d t_r = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = -\frac{w_d}{\sigma}$$

$$t_r = \frac{1}{w_d} \tan^{-1}\left(-\frac{w_d}{\sigma}\right) = \frac{\pi - \varphi}{w_d}$$

$t_p = ?$ $$\frac{dy(t_p)}{dt} = 0 - e^{-\xi w_n t_p}\left[w_d \sin w_d t + \frac{\xi w_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos w_d t\right)$$

$\sqrt{1-\xi^2}\, w_n$

$$+ \xi w_n e^{-\xi w_n t_p}\left[\cos w_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin w_d t\right] = 0$$

$$e^{-\xi w_n t_p}\left(w_d + \frac{\xi^2 w_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \sin w_d t_p = \frac{w_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin w_d t \, e^{-\xi w_n t_p} = 0$$

$\sqrt{1-\xi^2}\, w_n$

$$\frac{(1-\xi^2) w_n + \xi^2 w_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \longrightarrow \sin w_d t_p = 0$$

$$\frac{w_n}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$t_p = \frac{k\pi}{w_d} \; ; \; k = 1 - \frac{\pi}{w_d}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$Mp = y(tp) - 1$$

$$= 1 - e^{-\xi \omega_n \left(\frac{\pi}{\omega_d}\right)} \left[\cos \omega_d \left(\frac{\pi}{\omega_d}\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d \left(\frac{\pi}{\omega_d}\right) \right]$$

$$= e^{-\xi \omega_n \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n}} = e^{-\xi \pi / \sqrt{1-\xi^2}}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

جلسه چهارم : Linear Least square = Ls روش حداقل مربعات خطی

مدل ARX :

$$\frac{y}{u} = \frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \cdots + b_m q^{-m}}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_n q^{-n}}$$

نمود وابستگی پاسخ لحظه t را به لحظات گذشته y, u تعیین می کند. m, n

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \cdots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + \cdots + b_m u(t-m)$$

$1 \leqslant t \leqslant N$ شماره نمونه‌ها t Sampling Time : T_s

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) - \cdots - a_n y(t-n) + b_1 u(t-1) + \cdots + b_m u(t-m)$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} -y(t-1) \\ \vdots \\ -y(t-n) \\ u(t-1) \\ \vdots \\ u(t-m) \end{bmatrix}$$

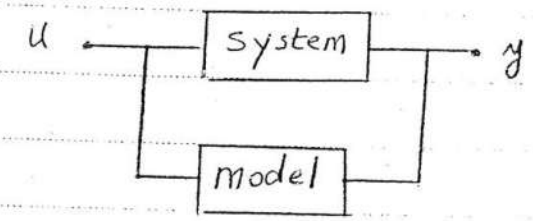
$$\hat{y}(t) = \varphi^T \cdot \theta = \begin{bmatrix} -y(t-1) & \cdots & -y(t-n) & | & u(t-1) & \cdots & u(t-m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

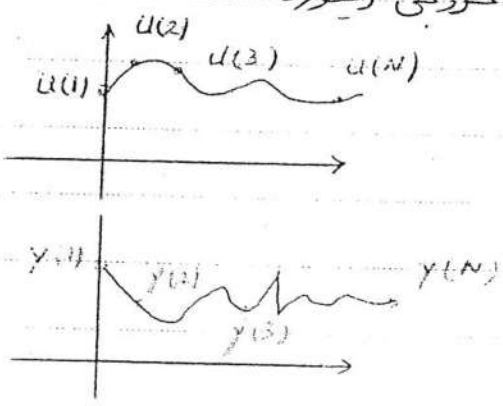
$\hat{y}(t)$ = مقدار محاسبه شده خروجی = Calculated Value

برحسب خروجیهای قبلی و

ورودیهای قبلی

$$Z^N = \{ u(1), y(1), u(2), y(2), \cdots u(N), y(N) \}$$ بردار ورودی و خروجی ریکورد شده





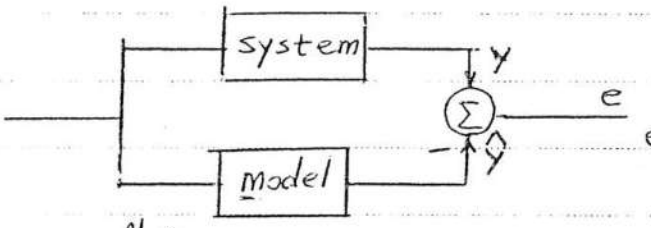
$u(1) \equiv$ ورودی در لحظه $t=0$

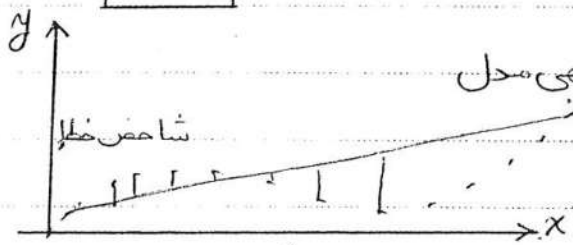
$u(2) \equiv$ ورودی در لحظه $t=T_s$

Subject:

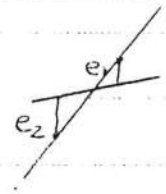
Year: Month: Date: ( )

هدف نهایی از شناسایی این سیستم





می خواهیم مقدار محاسبه شده خروجی مدل و خروجی واقعی سیستم به هم نزدیک شوند. خطا به صفر میل کند. از روش آماری استفاده می کنیم.



$e_1 + e_2 = 0$

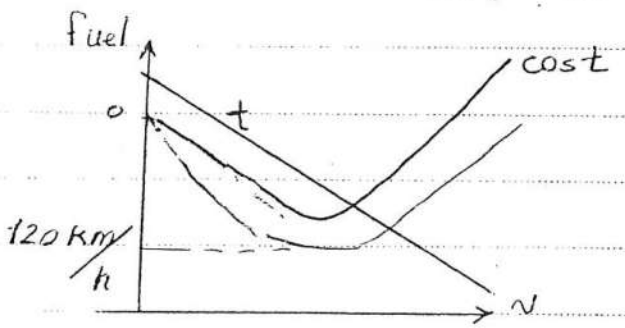
روش مربعات خطا برای کم کردن خطا

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum \left[y(t) - \hat{y}(t|\theta) \right]^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \left[y(t) - \varphi^T(t) \cdot \theta \right]^2$$

نرمالیزه کردن

Performance index شاخص عملکرد (بهینگی)



$$V = \frac{1}{N} \sum k_1 (y - \hat{y})^2 + k_2 (\dot{y} + \dot{\hat{y}})^2 + \dots$$

weight ضریب اهمیت

Subject:

Year. Month. Date.

$$\theta_N = \arg\min_{\theta} V_N(\theta, Z^N)$$

$\hat{\theta}$ = minimizing argument

$$\frac{d}{d\theta} V_N(\theta, Z^N) = \frac{2}{N} \sum_{1}^{N} \varphi(t)\left[y(t) - \varphi^T(t)\cdot\theta\right] = 0$$

$$\sum_{1}^{N} \varphi(t)\cdot y(t) = \sum_{1}^{N} \varphi(t)\cdot\varphi^T(t)\cdot\theta$$

$$\hat{\theta}_N = \left[\sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\cdot\varphi^T(t)\right]^{-1} \cdot \sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\, y(t)$$

$$\hat{y}(t) = \varphi^T \cdot \theta = \left[-y(t-1) \cdots -y(t-n) \,\middle|\, u(t-1) \cdots u(t-m)\right]$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

بردار φ رگرسیون

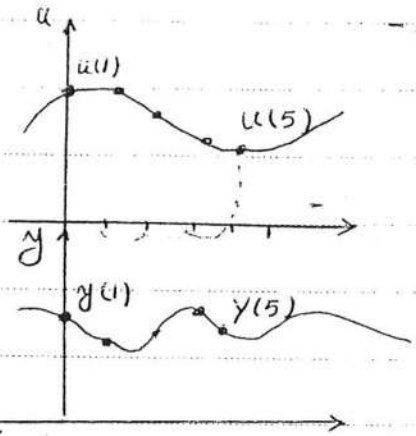
$$\varphi = \begin{bmatrix} -y(t-1) \\ -y(t-n) \\ u(t-1) \\ \vdots \\ u(t-m) \end{bmatrix}$$

$$y_t = \varphi^T \cdot \theta + e = \hat{y}_t + e$$

$$\underline{\hat{\theta}}_{LS} = (\varphi^T \varphi)^{-1} \cdot \varphi^T \underline{y}$$

مثال -

$$y(t) + a\,y(t-1) = b\,u(t-1)$$



مدل درنظرگرفته‌شده برای سیستم $= \dfrac{bq^{-1}}{1 + a_1 q^{-1}}$

فرض : $N = 5$

$\hat{\theta}_N = \begin{bmatrix} \hat{a}_N \\ \hat{b}_N \end{bmatrix}$ فرض‌شناسایی $\Rightarrow$ $u(0) = 0$, $y(0) = 0$

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{t=1}^{N} \varphi \cdot \varphi^T\right]^{-1} \cdot \sum \varphi \cdot y = \begin{bmatrix} \sum y^2(t-1) & -\sum y(t-1)\cdot u(t-1) \\ -\sum y(t-1)\cdot u(t-1) & \sum u^2(t-1) \end{bmatrix}$$

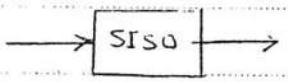
2x

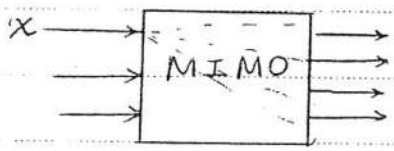
$$\cdot \begin{bmatrix} -\sum_{t=1}^{N} y(t-1)\cdot y(t) \\ \sum_{t=1}^{N} u(t-1)\cdot y(t) \end{bmatrix}_{2\times 1} =$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} y^2(0) + y^2(1) + y^2(2) + \cdots + y^2(4) & -[y(0)u(0) + y(1)u(1) + \cdots y(4)u \\ -[y(0)u(0) + y(1)u(1) + \cdots y(4)u(4)] & u^2(0) + u^2(1) + \cdots + u^2(4) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} -[y(0)y(1) + y(1)\cdot y(2) + \cdots + y(4)y(5)] \\ u(0)y(1) + u(1)\cdot y(2) + \cdots + u(4)y(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}$$

$N = m + n + 1$ اگر سیستم نویز نداشته باشد





ماتریس

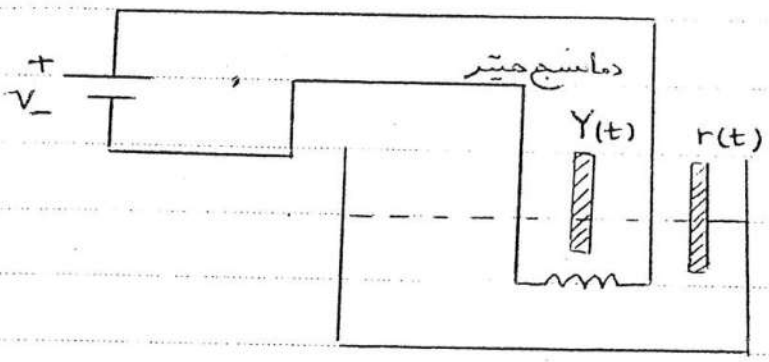
Subject :

Year . Month . Date . ( )

جلسه پنجم

۱- حل مثال از مدل رگرسیون خطی.

۲- آشنایی با Ident در نرم افزار Matlab.



r(t) : دمای نقطه ای مایع

Y(t) : دمای سطح جیوه

مطلوبست نوشتن مدل رگرسیون خطی برای سیستم موردبحث :

(3) $y(t) - y(t-1)$

فرضیات : تغییر دمای جیوه در فاصله زمانی در یک نمونه برداری متناسب با توان الکتریکی ورودی جیوه منهای تلفات حرارتی مایع.

(2) (1)

الکتریکی $P \propto v^2$

تلفات حرارتی $\propto Y(t) - r(t)$

$$Y(t) = y(t-1) + \alpha v^2(t-1) - \beta \cdot [y(t-1) - r(t-1)]$$

(3) (1) (2)

$$y(t) = y(t-1) - \beta y(t-1) + \alpha v^2(t-1) + \beta \cdot r(t-1)$$

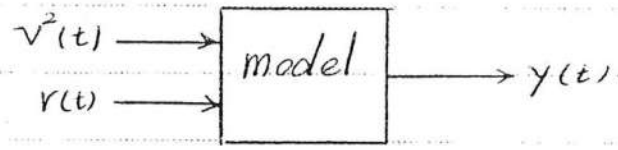
$$y(t) = \underbrace{(1-\beta)}_{\theta_1} y(t-1) + \underbrace{\alpha}_{\theta_2} v^2(t-1) + \underbrace{\beta}_{\theta_3} r(t-1)$$

Page

Subject :

Year . Month . Date . ( )

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$



$$\varphi^T = \begin{bmatrix} y(t-1) & v^2(t-1) & r(t-1) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \varphi^T(t) \cdot \theta$$

$$\varphi^T(t) = \begin{bmatrix} - & y(t-1) & \cdots & \end{bmatrix} \quad , \quad \theta = \begin{bmatrix} \beta_{-1} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

درکتاب به این صورت نوشته است.

$$y(1) = (1-\beta) \cdot y(0) + \alpha v^2(0) + \beta r(0)$$

$$y(2) = (1-\beta) \cdot y(1) + \alpha v^2(1) + \beta r(1)$$

$$y(3) = (1-\beta) y(2) + \alpha^2 v^2(2) + \beta r(2)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}_{N\times 1} = \begin{bmatrix} y(0) & v^2(0) & r(0) \\ y(1) & v^2(1) & r(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y(N-1) & v^2_{N-1} & r(N-1) \end{bmatrix}_{N\times 3} \times \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

N تعداد آزمایش (نمونه)

3 پارامترهای مجهول

درکتاب دکتر کراری

- u بردار رگرسیون
- U ماتریس رگرسیون

برخی کتابهای دیگر

- φ
- Φ

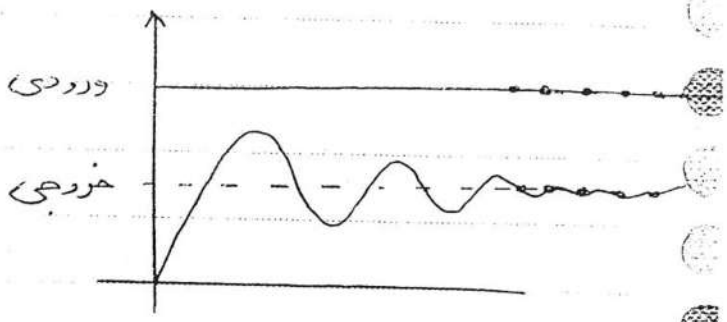
Subject :

Year . Month . Date .

قابلیت شناسایی :

$$\hat{\theta}_N = R(N)^{-1} \sum_{1}^{N} \varphi(t) . y(t)$$

$$R_N = \sum_{t=1}^{N} \varphi(t) . \varphi^T(t)$$



ورودی و یا نمونه برداری باید خوب و مطلوب باشد مثلاً شکل بالا چون ورودی و خروجی نمونه برداریش یکی است و اگر مثلاً در ماتریس صفحه قبل یکذاریم همهٔ مولفه ها یکی می‌شود و ماتریس ویژه دترمینانش صفر می‌شود که در این حالت بدحالی ماتریس $R(N)$ داریم ill Conditioning .

مرتبه سیستم n
مرتبه مدل P $\Longrightarrow P > n \Longrightarrow$ ill conditioning

۱- وقتیکه ورودی و خروجی‌های مورد استفاده مناسب نباشند (مودهای سیستم ترکیب نشده باشند)

۲- مرتبه مدل بیشتر از مرتبه سیستم واقعی باشد.

۳. در برخی موارد اگر سیستم حلقه بسته باشد ماتریس R نامناسب خواهد بود و پارامترها به طور صحیح تضمین زده نمی شوند.

Subject :

Year. Month. Date.

$$U_{(N\times P)} \Rightarrow \underset{P\times N}{U^T} \cdot \underset{N\times P}{U} = R$$

Example:

$$R = \begin{bmatrix} \sum y^2(t-1) & -\sum y(t-1)\cdot u(t-1) \\ -\sum y(t-1)\cdot u(t-1) & \sum u^2(t-1) \end{bmatrix} \xrightarrow{y=ku}$$

$$\begin{bmatrix} \sum y^2(t-1) & -\frac{1}{k}\sum y^2(t-1) \\ -\frac{1}{k}\sum y^2(t-1) & \frac{1}{k^2}\sum y^2(t-1) \end{bmatrix}$$

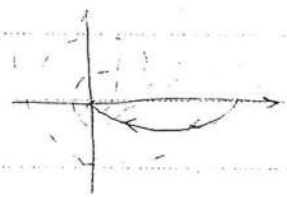
Delay یا تاخیر باعث ناپایدار می شود

در متلب : System ⟵ Enter ⟵ Ident

تمرین - آیا delay باعث ناپایدار می شود یا نه . اگر نه تحت چه شرایطی ؟

$K\,G(s)\,H(s)\,e^{-Ts}$

بازرش نایکوئیست :



Subject:

Year. Month. Date. ( )

تمرین ۱ - نشان دهید برای یک سیستم مرتبه ۲ که با مدل مرتبه ۳ تخمین زده شده، مشکل عدم شناسایی اتفاق می افتد.

$$y_t = u_t^T \cdot \theta + e_t$$

$$\hat{\theta} = (u^T u)^{-1} u^T y$$

If $\det(uu^T) = 0$

نمی توان $\hat{\theta}$ را بدست آورد

$$\frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

سیستم مرتبه ۲

$$\frac{b_1' z^{-1} + b_2' z^{-2} + b_3' z^{-3}}{1 + a_1' z^{-1} + a_2' z^{-2} + a_3' z^{-3}}$$

مدل مرتبه ۳

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -y_{t-1} & -y(t-2) & -y(t-3) & x(t-1) & x(t-2) & x(t-3) \end{bmatrix}}_{u_t^T} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \\ b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix}$$

مدل

واقعی $y(t) = \begin{bmatrix} -y_{t-1} & -y(t-2) & x(t-1) & x(t-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

u_t^T

به جای t ← $t-1$

$$y(t-1) = -a_1 y_{t-2} - a_2 y(t-3) + b_1 x(t-2) + b_2 x(t-3)$$

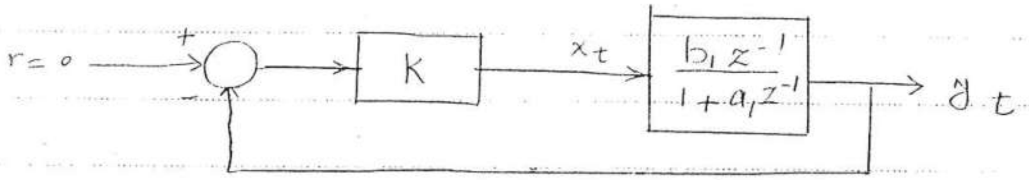
در مدل تخمین زده شده درجه ۳ برای سیستم y_{t-1} بصورت ترکیب خطی از x_{t-2} و x_{t-3} و y_{t-2} و $y(t-3)$ است لذا در بردار u_t^T داده‌های وابسته خطی پدیدی آیند ← $\det(u^T u) = 0$

$u^T u$ منفرد بوده و $\hat{\theta}$ مدل ساختار قابل شناسایی نیست

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین - با طراحی یک مثال نمونه نشان دهید تخمین پارامترهای سیستم حلقه بسته قابل انجام نیست. (مثال نقض)

فرض می‌کنیم سیستم حلقه بسته قابل شناسایی باشد، با توجه به وجود فیدبک بین درایه‌ها وابستگی خطی بوجود می‌آید



$$y_t = \begin{bmatrix} -y(t-1) & x(t-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + e$$

$$x(t) = (r(t) - y(t))k = -ky(t)$$

$x(t-1) = -k\,y(t-1)$ نشان‌دهنده وابستگی خطی بین رگرسورها می‌باشد $\det(UU^T) = 0$

اما اگر در دینامیک سیستم به جای $b_1 z^{-1}$ ← $b_0 + b z^{-1}$ داشته باشیم وابستگی بین x_t و y_t بوجود نمی‌آید، بین حالت حلقه بسته ممکن است مشکل عدم قطعیت پیش بیاید.

Subject :
Year . Month . Date .

جلسه ششم

۱- مدل عمومی خطی سیستمها .

۲. نحوه کار با IDENT در Matlab

سیستم های خطی به دو دلیل مورد بررسی قرار می گیرند :

۱- مدل بسیاری از سیستم ها خطی است و همچنین بسیاری از سیستمهای غیر خطی را می توان با استفاده از مدل خطی شناسایی کرد.
۲- تحلیل سیستمهای غیرخطی را به دلیل دشواری این سیستمها برمبنای سیستمهای خطی انجام می دهند.

$$q^{-1}\, x(k) = x(k-1)$$

$$y(k) = G(q).u(k) = \frac{\widetilde{B}(q)}{\widetilde{A}(q)}.u(k)$$

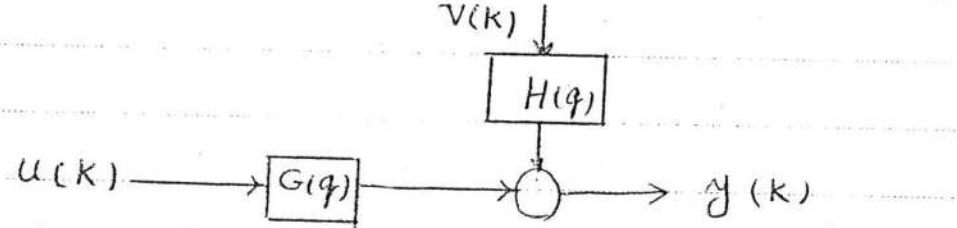
تابع تبدیل ورودی $G(q)$
input transform func.

$$n(k) = H(q).v(k) = \frac{\widetilde{C}(q)}{\widetilde{D}(q)}.v(k)$$

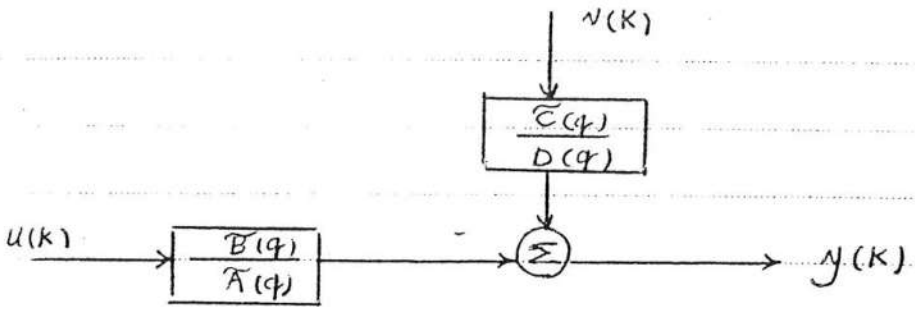
$v(k)$: نویز سفید

تابع تبدیل نویز $H(q)$:
noise transform func.

$$\boxed{y(k) = G(q).u(k) + H(q).v(k)}$$



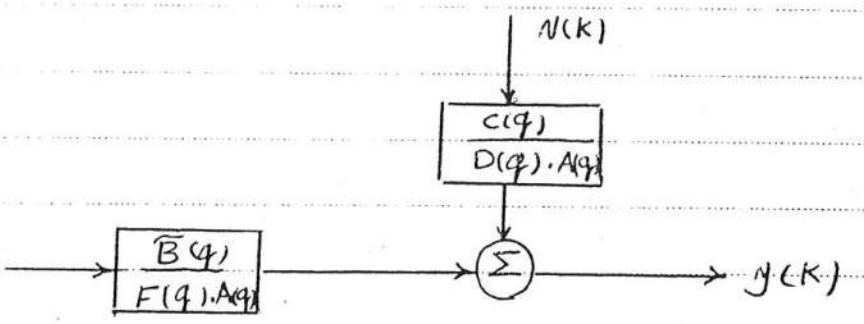
$y(t)$ = Determinstic + stochastic
اثر ورودی (معلوم) اثر نویز (تصادفی)

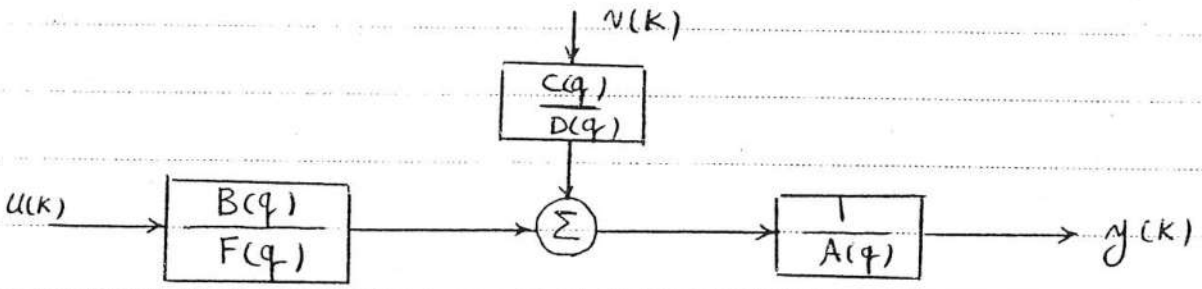


$$\tilde{A}(q) = \tilde{F}(q) \cdot A(q)$$

مخرج ها عامل مشترک دارند

$$\tilde{D}(q) = \tilde{D}(q) \cdot A(q)$$





اگر عامل مشترکی بین $\tilde{A}(q)$ ، $\tilde{D}(q)$ نباشد $A(q) = 1$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

AR : $y(k) = \frac{1}{D(q)} \cdot v(k)$: (AR) مدل سری زمانی

Auto Regressive

مدل جابجایی میانگین : (MA)

MA : $y(k) = c(q) \cdot v(k)$

Moving Average.

مثال MA : $c(q) = c_1 q^{-2} + c_2 q^{-1} \rightarrow y(k) = c_1 v(k-2) + c_2 (v(k-1)$

فرض $c_1 = \frac{1}{2} = c_2 \rightarrow y(k) = \frac{1}{2} [v(k-2) + v(k-1)]$

میانگین

درحالت کلی $c(q)$ یک چند جمله‌ای از q است .

در هر لحظه میانگین می‌گیرد .

مدل ARMA : $y(k) = \frac{c(q)}{D(q)} \cdot v(q)$

$q = z^{-1}$

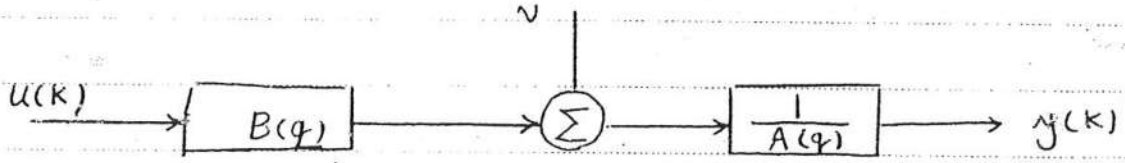
Subject:
Year. Month. Date.

external input
exogenous input.

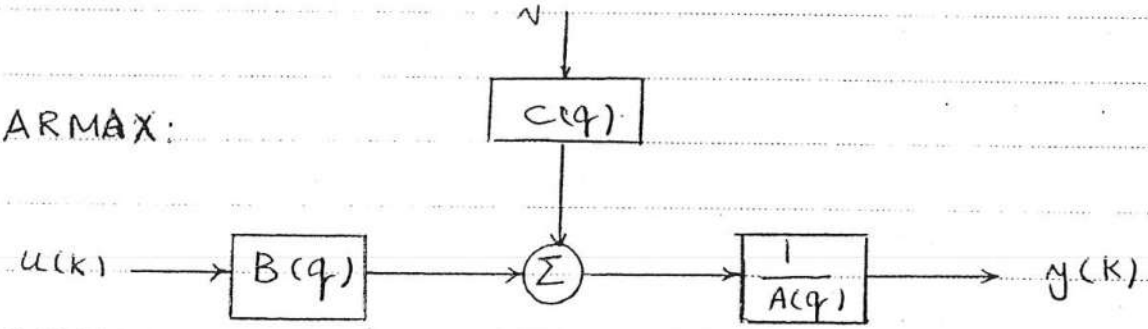
با حضور ورودی :

ARX: $\frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{1}{A(q)}v(k)$

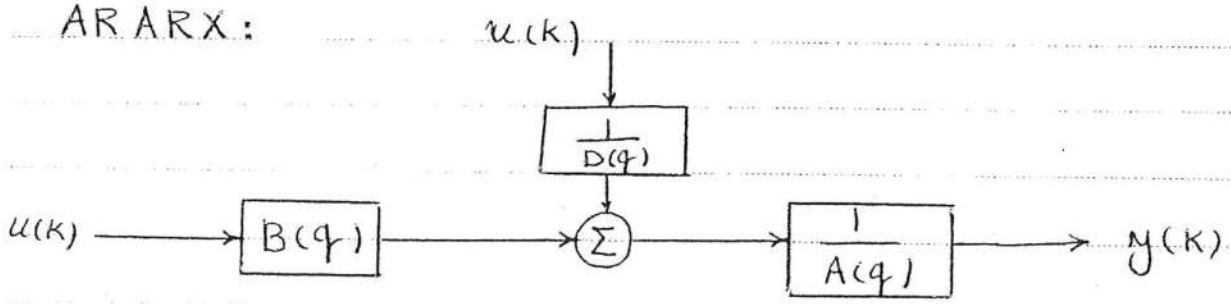
دینامیک نویز و تابع تبدیل سیستم یکی است. نویز ناشی از خود سیستم مورد نظر بوجود آمده است.
دینامیک همان قطبهای تابع تبدیل است.



ARMAX:



ARARX:



Subject :

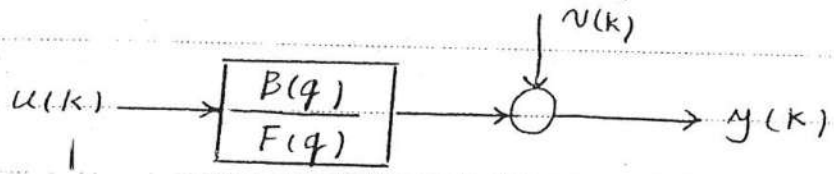
Year . Month . Date . ( )

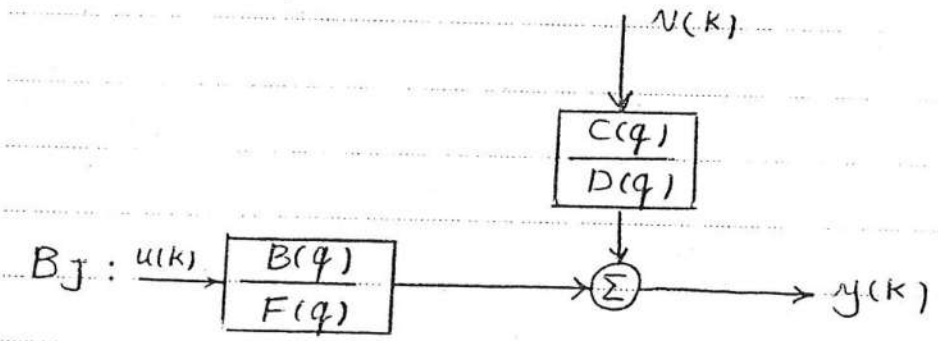
(I) ARX, ARMAX, ARARX } equation error model : همگی عامل مشترک $\frac{1}{A(q)}$

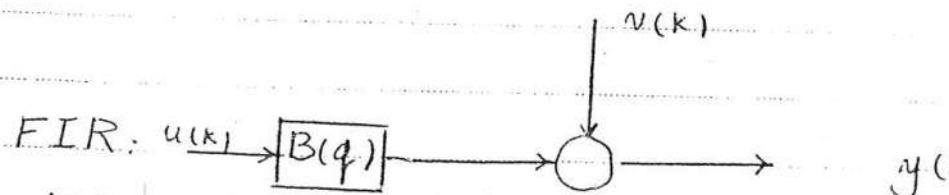
را در حرزجی دارند . یعنی نویز حاری دینامیک های سیستم است .

(II) output error model { OE : output error model
BJ : Box Jenkins
FIR: Finite impulse response mo

OE: نویز سفید داریم درحرزجی :







نویز حاری دینامیکهای سیستم اصلی نیست . یعنی مدل نویز و سیستم مستقل هستند .

Subject:
Year. Month. Date.

تمرین - آیا تاخیر باعث ناپایداری می‌شود؟ تحت چه شرایطی؟

سیستم بدون تاخیر: $G(s) = \frac{k}{1+\tau s} \rightarrow \angle G(w) = -\tan^{-1}(\tau w)$

$$|G(w)| = \frac{k}{\sqrt{1+\tau^2 w^2}}$$

سیستم با تأخیر: $G(s) = \frac{k e^{-t_d s}}{1+\tau s}$ $\quad \angle G(w) = -\tan^{-1} \tau w - t_d w$

$$|G(w)| = \frac{k}{\sqrt{1+\tau^2 w^2}}$$

تاخیر در نمودار بد اندازه هیچ تاثیری ندارد و فقط در نمودار فاز تاثیر گذار است.

با مقایسه دیاگرام بد با تاخیر و بدون تاخیر می‌توان t_d را تعیین کرد.

می‌نیم یا غیرمی‌نیمم فاز بودن سیستم در دیاگرام اندازه اثری ندارد فقط در دیاگرام فاز مشخص است. باید زاویه سیستم را در فرکانس بالا مشاهده کرد.

روش دوم - ناپایداری $\quad \frac{e^{-t_d s}}{s+1}$

$$\angle G(w) = -\tan^{-1} w \qquad |G(w)| = \frac{1}{\sqrt{w^2+1}}$$

محاسبه مرز پایداری $\rightarrow \left| \frac{e^{-jwt_d}}{jw+1} \right| = 1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{w^2+1}} = 1$

w^* بدست می‌آید

$$\rightarrow \angle G(w) = -\tan^{-1} w^* - t_d w^* = -180$$

$\rightarrow t_d$ ؟ برنامه‌ای بدست می‌آید

Subject:
Year. Month. Date.

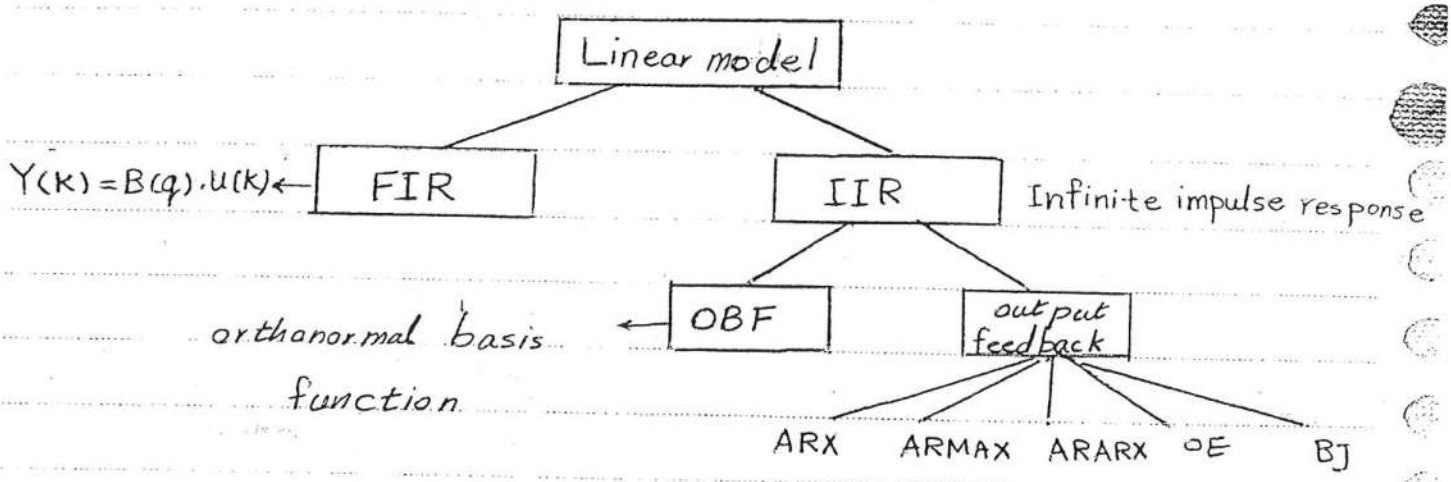
جلسه هفتم

تقسیم بندی 1 :

a : مدلهای با پاسخ ضربه نامحدود

سیستمهای خطی ⇐

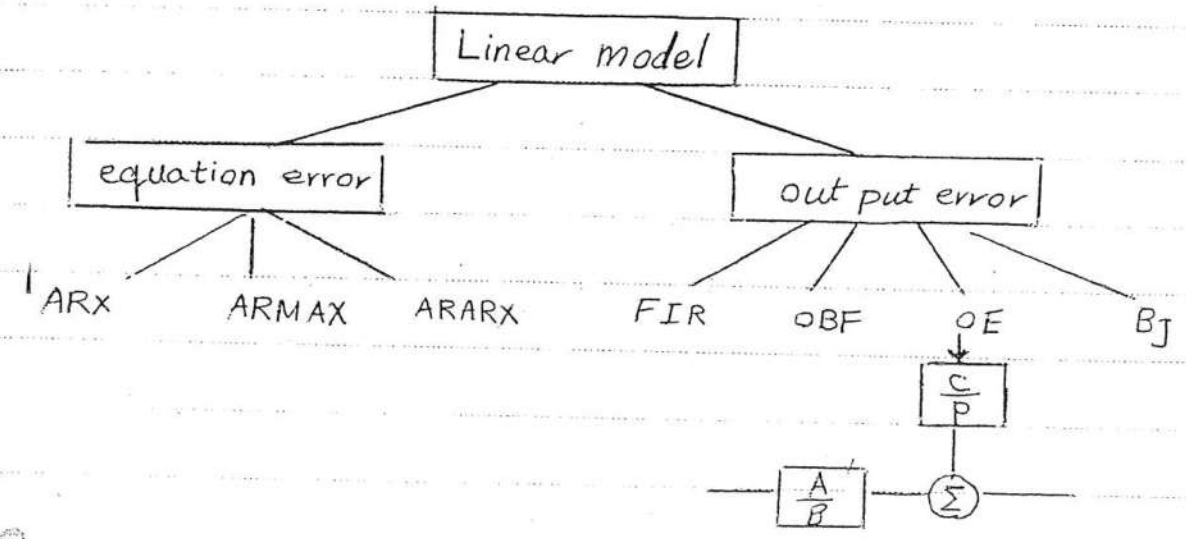
b - : مدلهای با پاسخ ضربه محدود.



$$Y(k) = \frac{B(q)}{F(q)} \cdot u(k) + v(k)$$

تقسیم بندی 2 : a . مدلهای equation error

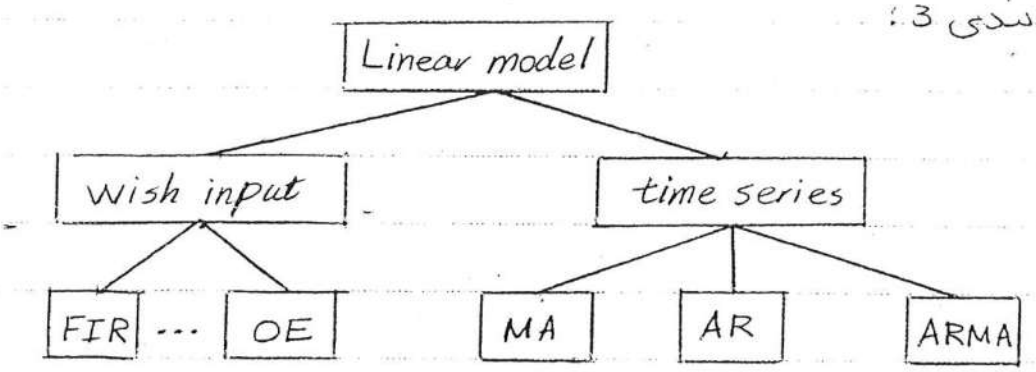
b . مدلهای output error



Subject :

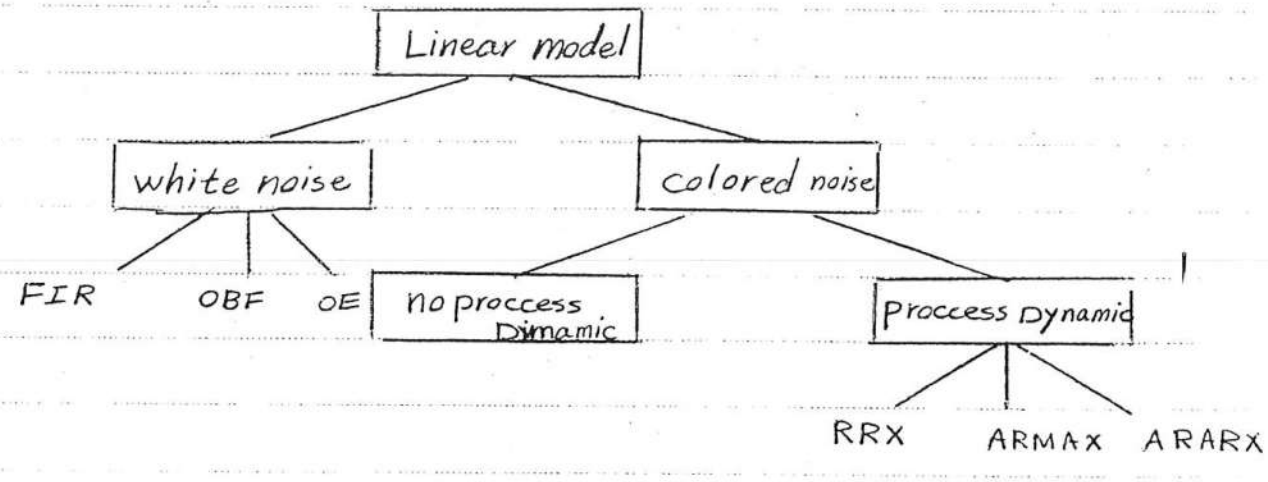
Year . Month . Date . ( )

تقسیم بندی 3 :



تقسیم بندی 4 : نویز سفید

براساس خواص نویز نویز رنگی

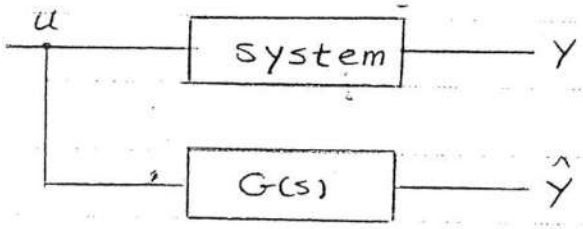


$$y = \frac{B}{A} u + \frac{C}{A} e$$

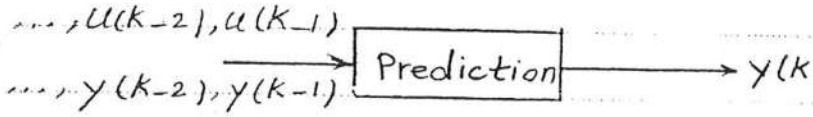
Subject :
Year . Month . Date . ( )

پیش بینی : ۱. Simulation ← (اثر نویز بصورت غیر مستقیم تاثیر دارد)

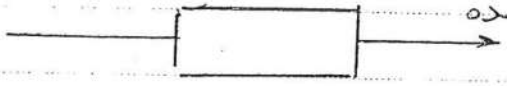
۲. Prediction



fully deterministic



stochastic



حالت بعدی پیش بینی لحظات دورتر در آینده

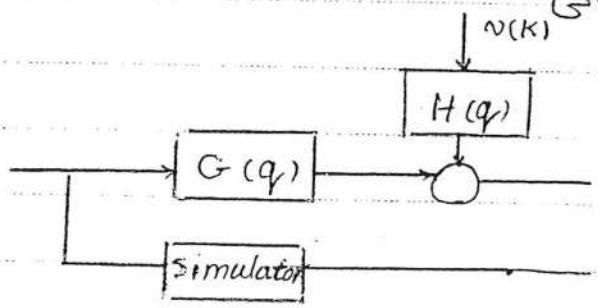
L step ahead

L step in advance

فرض می کنیم نویز داشته باشد. خودمان اضافه کردیم

فرض : $\hat{y}(k) = G(q) \cdot u(k) + \overbrace{H(q) \cdot w(k)}$ ②

نویز سفید محاسباتی



$y(k) = G(q) \cdot u(k)$ ①

ازنظر کیفیت خروجی مدل ① بهتر است از ②

درمدل بالا ما ورودی را به G می دهیم وخودش Simulation را انجام می دهد.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مهم: یعنی $\hat{y}(k)$ از $k-1$ می‌خواهیم بدست آوریم $\hat{y}(k|k-1)$

$$\hat{y}(k|k-1) = s_0 \cdot u(k) + s_1 \cdot u(k-1) + \cdots + s_{ns} \cdot u(k-ns) +$$

$$- t_1 \cdot y(k-1) + \cdots + t_{nt} \cdot y(k-nt)$$

$S(q)$ فیلتر $T(q)$ فیلتر

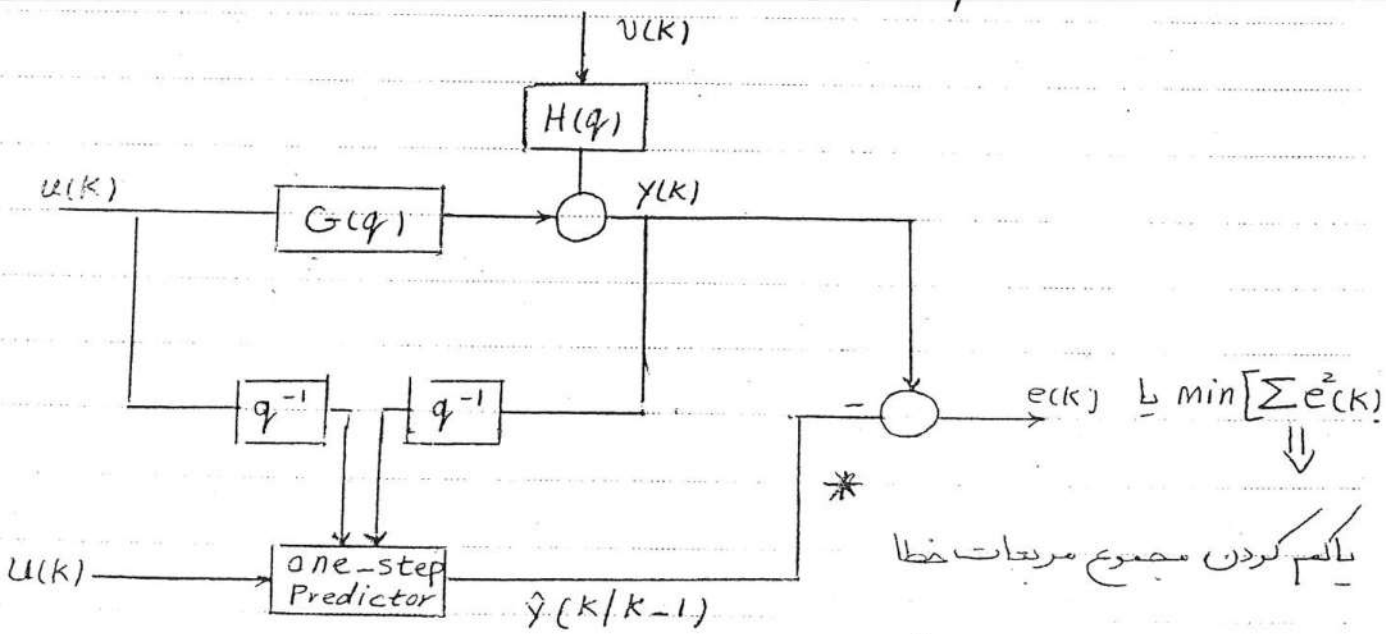
$$\Longrightarrow \hat{y}(k|k-1) = \underbrace{S(q) \cdot u(k)}_{\text{Deterministic}} + \underbrace{T(q) \cdot y(k)}_{\text{Stochastic}}$$

چون نویز در ورودی تاثیری ندارد، چون نویز در خروجی تاثیری ندارد،

: Optimal predictor

$S(q)$ ، $T(q)$ =? برای رسیدن به $\hat{y}(k|k-1)$ بسیار نزدیک به $y(k)$ ،

$$* \quad \hat{y}(k|k-1) = \frac{G(q)}{H(q)} \cdot u(k) + \left(1 - \frac{1}{H(q)}\right) \cdot y(k)$$



یا کم کردن مجموع مربعات خطا

لحظات حال را نداریم فقط گذشته را داریم.

Subject:
Year. Month. Date.

اولین چیزی که باید بدانیم خطای پیش بینی است:

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1)$$

$$\begin{cases} \hat{y}(k|k-1) = S(q)\cdot u(k) + T(q)\cdot y(k) \\ y(k) = G(q)\cdot u(k) + H(q)\cdot e(k) = G(q)\cdot u(k) + H(q)\left[y(k) - \hat{y}(k|k-1)\right] \end{cases}$$

$$\frac{1}{H}\cdot y(k) = \frac{G}{H}\cdot u + y(k) - \hat{y}(k|k-1)$$

$$\hat{y}(k|k-1) = \frac{G}{H}\cdot u + \left(1 - \frac{1}{H}\right) y$$

$$\boxed{S(q) = \frac{G}{H}} \qquad \boxed{T(q) = \left(1 - \frac{1}{H}\right)}$$

یک نوعی از پیش بینی optimal predictor

اگر از این دو رابطه استفاده کنیم و برقرار شد پیش بینی بهینه حاصل می شود

$$\text{ARX} \begin{cases} y(k) = G(q)\cdot u(k) + H(q)\cdot v(k) \\ y(k) = \dfrac{B(q)}{A(q)}\cdot u(k) + \dfrac{1}{A(q)}\cdot v(k) \\ S(q) = B(q) = \dfrac{G}{H} \\ T(q) = 1 - \dfrac{1}{H} = 1 - A(q) \end{cases}$$

PaPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\hat{y}(k|k-1) = S(q).u(k) + T(q).y(k)$$

$$\hat{y}(k|k-1) = B(q).u(k) + (1-A).y(k)$$

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}.u(k) + v(k)$$

OE:

$$S(q) = \frac{B}{F} \qquad \Rightarrow \hat{y}(k|k-1) = \frac{B}{F}.u(k)$$

در Matlab تست شود.

$$T(q) = 1 - \frac{1}{H} = 1-1 = 0$$

OE: برای : $Simulator = y = G:u = \frac{B}{F}.u(k)$

Min خطای پیش بینی یا پیش بینی مربعات خطا در لحظه بعد.

Matlab در PEM

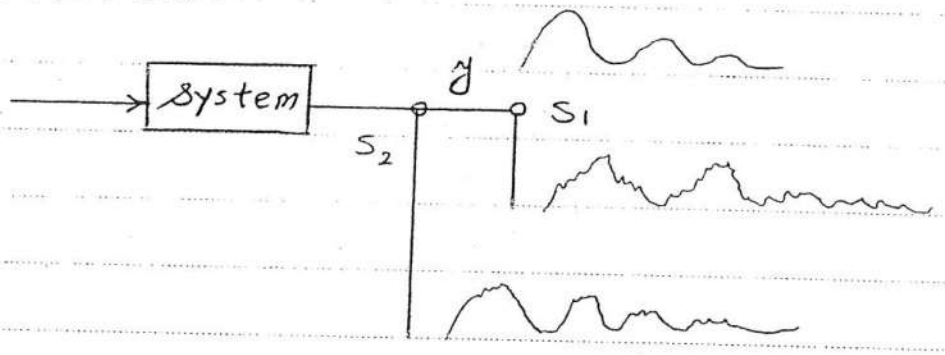
Subject :
Year . Month . Date .

جلسه هشتم

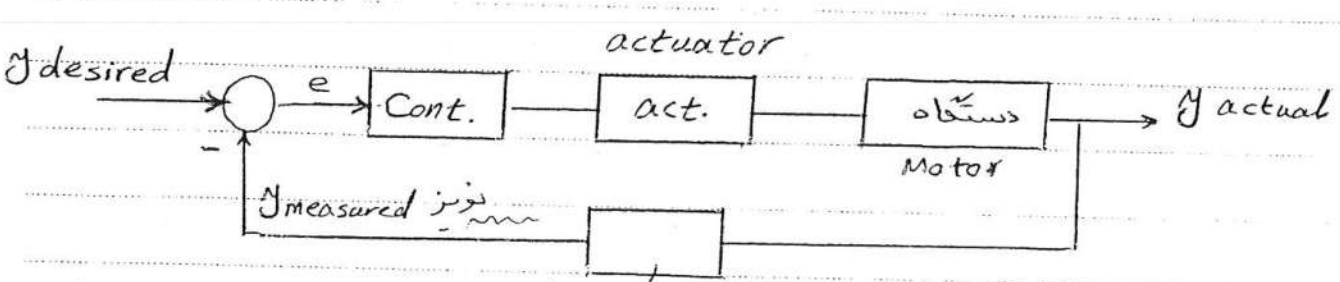
نویز : Noise تشعشعی

Noise → نویز حقیقی → ردی خط برق

نویز اندازه‌گیری ← ناشی از خود سنسور



تکلیف 5: دلیل وجود نویز در خروجی سنسورها چیست ؟ (نویز اندازه‌گیری)



$e = y_{des} - y_{mes}$

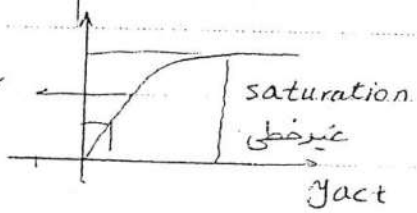
$\lim_{e \to 0} = y_{mes} \to y_{des}$

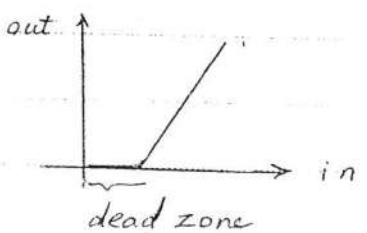
$G_{tc} = \frac{k.s}{s^2 + 4s + 9}$

$y_{mes} = 0.2 + \frac{Ks}{s^2 + 4s + 9}$

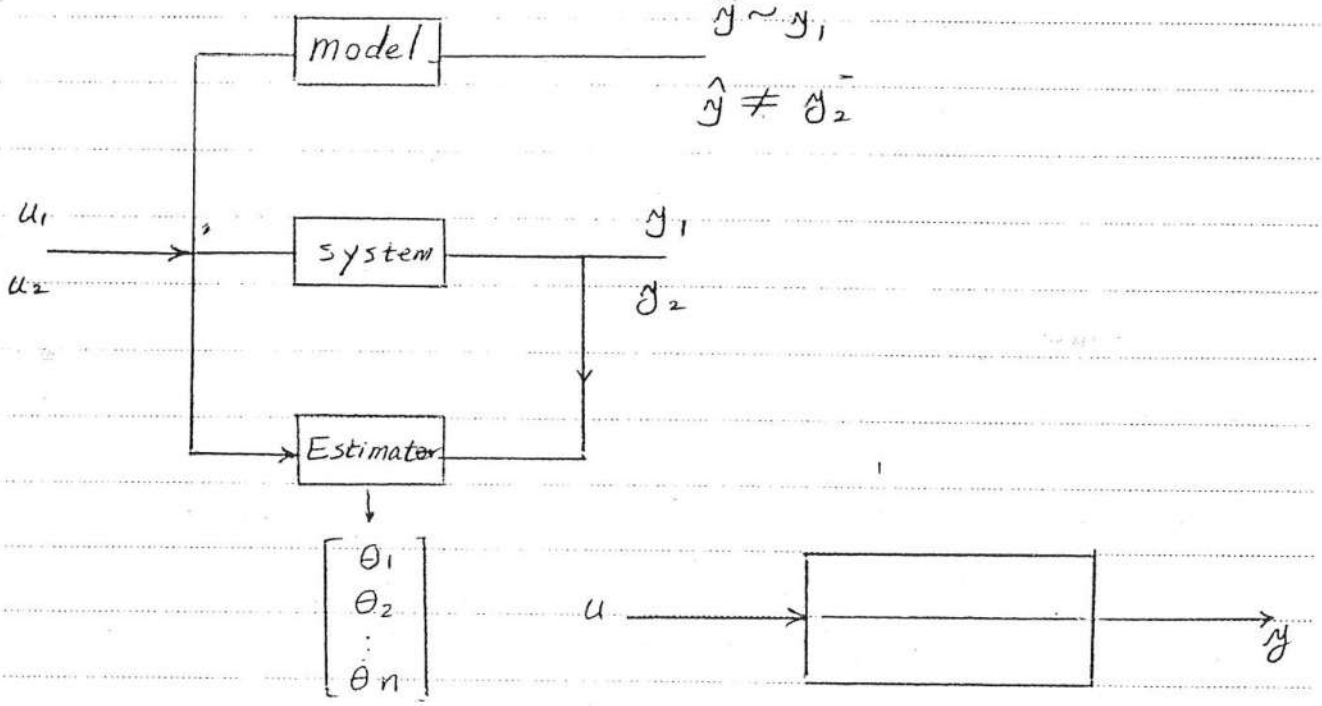
offset نویز

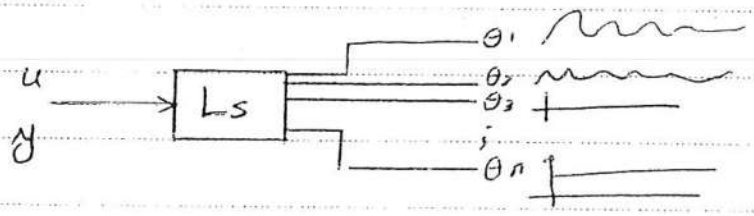
هدف : $y_{act} \to y_{des}$

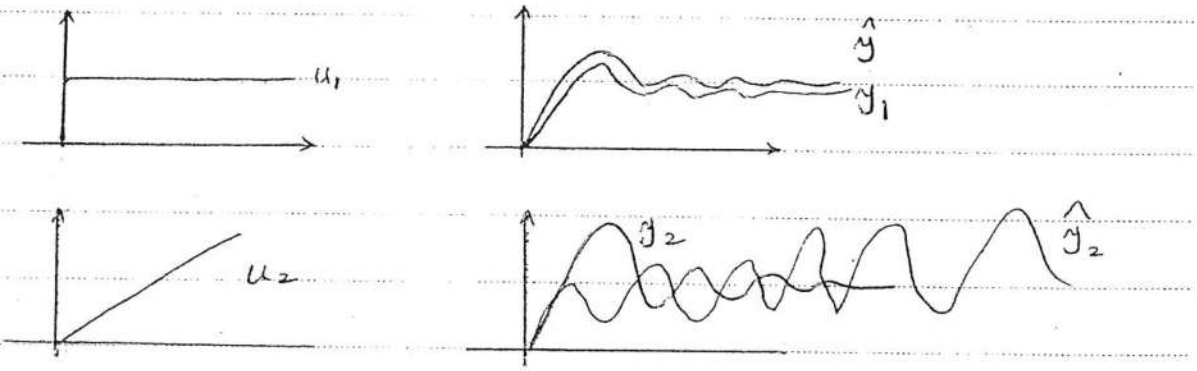




روش حداقل مربعات Least square :



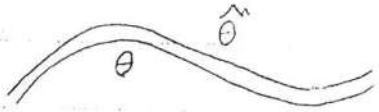




مقادیر با توجه به یک ورودی $\hat{y} \sim y$ ولی وقتی ورودی عوض شد دیگر تخمین صحیح نیست.

Subject:
Year. Month. Date.

مقدار بایاس b $\quad b = \underbrace{E(\hat{x})}_{\text{میانگین } \hat{x}} - x$



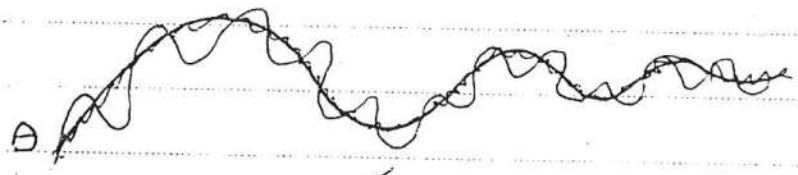
offset دارد

$\hat{\theta}$

θ

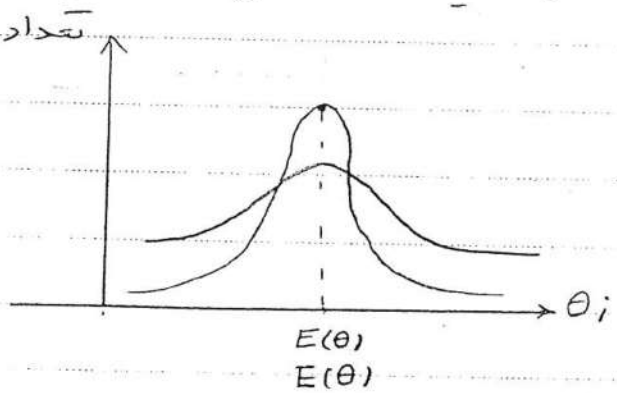
یکی از خصوصیات تخمین گر خوب اینست که b کوچک باشد.

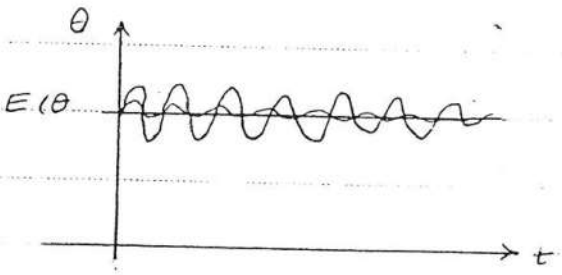
$e =$ white noise $\longrightarrow$ LS بهترین پاسخ $\Rightarrow b = 0$



θ بهتر است

یکی دیگر از خصوصیات تخمین گر خوب اینست که واریانس تخمین حداقل باشد.





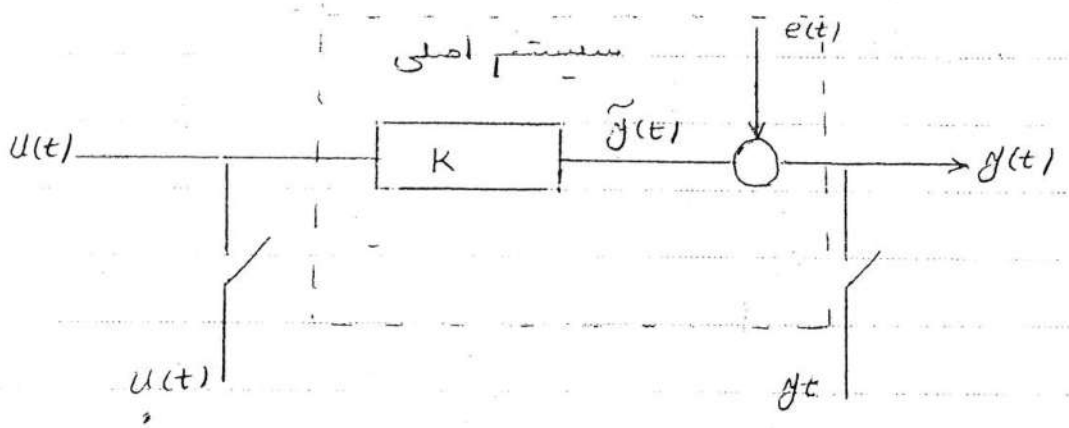
ساده برای سیستم های نامتغیر با زمان $\quad b = E(\hat{\theta}) - \theta$

ساده برای سیستم های متغیر با زمان $\quad b(\theta) = E_\theta(\hat{\theta}/\theta) - \theta$

PAPCO

Subject :

Year . Month . Date .



نمونه برداشت می‌کنیم $N \longrightarrow u_t, y_t$

(از u و y)

$u_1, u_2 \dots u_N$

$y_1, y_2 \dots y_N \longrightarrow \hat{k}$

$$\hat{k} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{y_t}{u_t}$$

* سیستم اصلی : $y(t) = k.u(t) + e(t)$

$$b = E(\hat{k}) - k = E\left[\frac{1}{N} \sum \frac{y_t}{u_t}\right] - k$$

$$b = E\left[\frac{1}{N} \sum \frac{ku_t + e_t}{u_t}\right] - k$$

$$b = E\left[\frac{1}{N} \sum \left(k + \frac{e_t}{u_t}\right)\right] - k$$

$$b = \frac{1}{N}\left[\sum E(k) + E\left(\frac{e_t}{u_t}\right)\right] - k$$

امید $u(t)$ خودش می‌شود.

$$b = \cancel{k} + \frac{1}{N} \sum \frac{E(e_t)}{u_t} - \cancel{k}$$

$$b = \frac{1}{N} \sum \frac{E(e_t)}{u_t}$$

Subject :
Year . Month . Date . : :

نویز سفید $E(e_t) = 0 \longrightarrow b = 0$

اگر نویز بایاس داشته باشد :

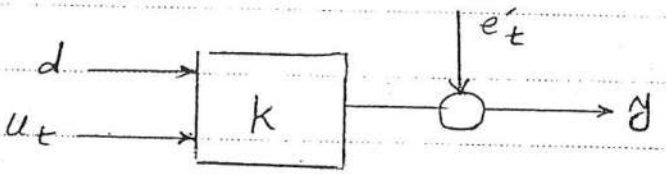
$e_t = d + e'_t$

$y_t = k u_t + e_t$

$e_t = d + e'_t$

$\longrightarrow y_t = \begin{bmatrix} u_t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ d \end{bmatrix} + e'_t$

$y_t = k u_t + d + e'_t \xrightarrow{LS}$ d, k تخمین زده می‌شوند.



$\theta = \begin{bmatrix} d \\ k \end{bmatrix} \longrightarrow \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{d} \\ \hat{k} \end{bmatrix}$

Subject:
Year. Month. Date.

بررسی شرایط یک تخمینگر: جلسه نهم

$$\hat{\theta} = A \cdot y$$

حداقل مربعات معمولی $A = (\varphi^T \cdot \varphi)^{-1} \cdot \varphi^T$: OLS

حداقل مربعات وزن داده شده $A = (\varphi^T \cdot w \varphi)^{-1} \cdot \varphi^T w$: WLS

$$\underline{b} = E(\underline{\hat{\theta}}) - \underline{\theta}$$

نویز در حالت کلی $\longrightarrow$ $y = \varphi \cdot \underline{\theta} + \underline{e}$

$$G(q) = \frac{b_1 q^{-1} + b_2}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \hline b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

یا یاس $b = \underbrace{E(\hat{\theta}) - \theta}_{E(\theta)} = E\left[A(\varphi\theta + e)\right] - \theta$

$$= E(A \cdot y) - \theta$$

$$= E\left[A\varphi\theta + Ae\right] - \theta$$

اگر θ مقدار ثابت باشد امید آن هم ثابت است.

$$b = E\left[(A\varphi - I)\theta\right] + E(Ae)$$

$A = (\varphi^T \cdot \varphi)^{-1} \cdot \varphi^T \longrightarrow$ OLS $\Longleftrightarrow A = (\varphi^T \cdot w \cdot \varphi)^{-1} \cdot \varphi^T \cdot w \rightarrow w$

Subject :
Year . Month . Date .

برای صفرکردن b :

شرط ① : $A.\varphi = I$

$A\varphi = (\varphi^T.\varphi)^{-1}.(\varphi^T\varphi) = I$ برقرار OLS برای تخمین گر خطی است.

② $E(e) = 0$ باشد.

$E(e)=0 \Rightarrow$ برای نویز سفید یا برای خطاهایی که شبیه نویز سفید هستند.

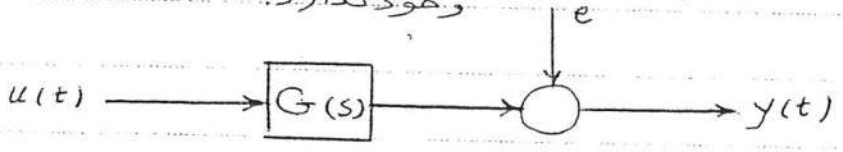
③ $E(A.e) = E(A).E(e)$ نویز یا خطا مستقل از A باشد.

$$\varphi = [\underbrace{-y_{t-1}, y_{t-2} \dots}_{\text{گذشته خروجی}} \mid \underbrace{u_t, u_{t-1}}_{\text{حال و گذشته ورودی}}]$$

$$\Rightarrow \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \theta = (\varphi^T\varphi)^{-1}.\Phi^T = A \quad *$$

* این سیستم : ا- خروجی های گذشته $y_{t-1}, y_{t-2} \dots$ حاوی نویزهای $e_{t-1}, e_{t-2} \dots$ هستند.

۲- ورودیهای حال و گذشته : هیچ نویزی در این مولفه ها وجود ندارد.



Subject :

Year . Month . Date . ( )

$E(e(t) \text{ با } \begin{matrix} e_{t-1} \\ e_{t-2} \end{matrix}) =$ اگر نویز سفید باشد $\Rightarrow E(e(t).A) = E(\varphi).E($

$e(t-t_1)$ با $e(t)$ مستقل است.

$E(e) = 0$ چون نویز سفید است.

$$y_t = x_t * h_t = h_t * x_t = \sum_{k=0}^{m} h_k . x_{t-k} =$$

$$[x_t \; ; \; x_{t-1} \; \dots \; x_{t-m}] \cdot \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} + e_t$$

$$\varphi^T = \underbrace{[x_t \;\; x_{t-1} \; \dots \; x_{t-m}]}_{\text{ورودی}} \Rightarrow A = (\varphi^T . \varphi)^{-1} . \varphi^T$$

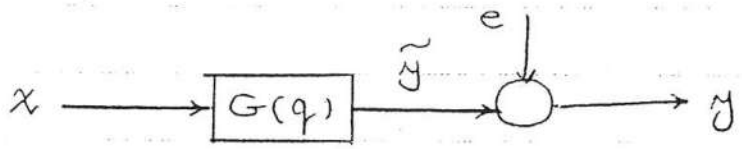
$E(A.e) = E(A).E(e) \Rightarrow b = 0$ چون شامل ورودی است

پس نویز ندارد. پس if $E(e) = 0$

می شود نوشت $E(A).E(e)$

برای هر نویزی که فقط شرط $E(e) = 0$ را داشته باشیم یا هر نویزی که $E(e) \neq 0$ باشد می توان با این $b = 0$ داشت

Example: $G(q) = \dfrac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots}{1} = \dfrac{\tilde{y}}{x}$



Subject :

Year . Mouth . Date . ( )

Example: $y = \underbrace{[1 \quad t \quad \frac{1}{2}t^2]}_{①} \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \\ a \end{bmatrix} + \underbrace{e_t}_{②}$

در این مثال ماتریس های بخش ① هیچ وابستگی به e_t ندارد

$y_t = \frac{B}{A} \cdot x_t + \frac{C}{A} \cdot v_t \leftarrow$ نویز

اگر نویز سفید باشد $y = \varphi x + e$.

$A y_t = B \cdot x_t + C v_t$

$A y_t = B \cdot x_t + e_t \longrightarrow C=1$ یا عدد ثابت $\Rightarrow y = \frac{B}{A} x + e$

$\varphi = [-y_{t-1} \quad y_{t-2} \ldots \mid x_t \quad x_{t-1} \ldots]$

$\varphi \longrightarrow (\varphi^T \varphi)^{-1} \cdot \varphi^T \Rightarrow E(A.e) = E(A, \overset{cv}{\widetilde{v}}) = E(A), E(v)$

اگر نویز رنگی باشد این رابطه درست نیست چون به پارامترهای

حال گذشته وابسته است پس (A, v) به هم وابسته است

مستقل نمی شود.

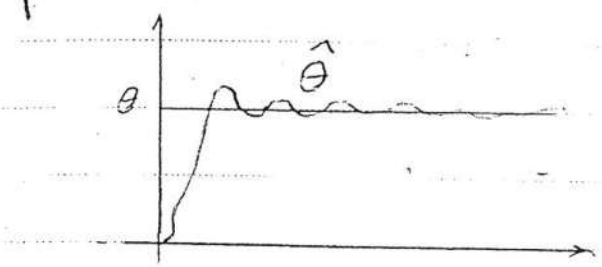
Subject :

Year . Month . Date . ( )

Subject:
Year. Month. Date.

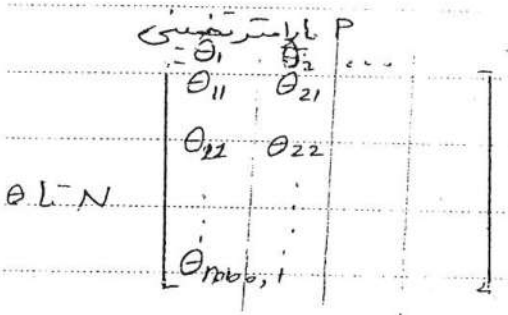
جلسه دهم

محاسبه ماتریس کوواریانس تخمین:



$var(\theta)$

$$Var(\theta) = \frac{1}{n-1} \sum (\theta - \hat{\theta})^2$$



$$Cov(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})^T\right]$$

$$b = E(\hat{\theta}) - \theta$$

$$b = E(\underline{\hat{\theta}}) - \underline{\theta} = 0 \longrightarrow E(\hat{\theta}) = \underline{\theta}$$ $\hat{\theta}$ نااریب θ

$$Cov(\underline{\hat{\theta}}) = E\left[(\underline{\hat{\theta}} - \underline{\theta}) \cdot (\underline{\hat{\theta}} - \underline{\hat{\theta}})^T\right] \xrightarrow{(3)}$$ هدف: محاسبه ماتریس کوواریانس تخمین در تخمین‌گرهای خطی و بدون بایاس.

$$\begin{cases} \underline{y} = \Phi \underline{\theta} + \underline{e} & (1) \\ \hat{\theta} = A \cdot y & (2) \end{cases}$$

Page

Subject:

Year. Month. Date. ( )

(2) → (3) $\Rightarrow$ $Cov(\hat{\underline{\theta}}) = E\left[(A.\underline{y} - \theta).(A\underline{y} - \theta)^T\right]$ $\xrightarrow[(4)]{(1) \to (4)}$

$$Cov(\hat{\underline{\theta}}) = E\left\{\left[A.(\Phi\underline{\theta} + \underline{e}) - \theta\right]\left[A.(\Phi\underline{\theta} + \underline{e}) - \theta\right]\right\}$$

$$= E\left\{\left[(A\Phi - I)\underline{\theta} + A.e\right].\left[(A\Phi - I)\underline{\theta} + A\underline{e}\right]^T\right\}$$

($A\Phi - I \to 0$)

$$A = (\Phi\Phi^T)^{-1}.\Phi^T$$

$$Cov(\hat{\underline{\theta}}) = E\left[A.e.e^T.A^T\right]$$

If: e = white noise $\longrightarrow$ $Cov(\hat{\theta}) = E(A).E(e.e^T).E(A^T)$

$E(e) = 0$

$$Cov(\hat{\underline{\theta}}) = E(A).Cov(e).E(A^T)$$

$$e_t = y_t - \hat{y}_t$$

$Cov(e) \downarrow \Rightarrow Cov(\hat{\theta}) \downarrow$

$$A: (y_{t-1}^{x_1}, y_{t-1}^{x_2} \dots, u_t, u_{t-1}, \dots)$$

If A is deterministic $\longrightarrow$

$$\begin{cases} Cov(\hat{\underline{\theta}}) = A.Cov(e).A^T & (1) \\ Cov(e) = \delta^2.I & (2) \end{cases}$$

(1), (2) $\Rightarrow$ $Cov(\hat{\underline{\theta}}) = \delta^2.(A.A^T)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$cov(e) = E(e.e^T) = \begin{bmatrix} \delta^2 & & 0 \\ & \delta^2 & \\ & & \delta^2 \\ 0 & & \ddots \delta^2 \end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس کوواریانس تخمین برای تضمین کرحداقل مربعات : ۱

$$A = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$$

$$AA^T = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} = (\Phi^T \Phi)^{-1}$$

(1) $\begin{cases} A = deterministic \longrightarrow cov(\hat{\theta}) = A.cov(e).A^T = A Re A^T \\ e_t : every\ noise \end{cases}$

Re : ماتریس همبستگی نویز

(2) $\begin{cases} A = deterministic\ or\ stochastic \rightarrow cov(\hat{\theta}) = \delta^2.AA^T = \delta^2.(\Phi^T\Phi)^{-1} \\ e_t : white\ noise \end{cases}$

(E(A.))

A تقریبی است و درحالت (2) با انجام آزمایشات متعدد بدست می آید ولی

درحالت (1) فقط با یک آزمایش بدست می آید.

$$\hat{e} = y - \hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \vdots \\ \hat{e}_N \end{bmatrix} \longrightarrow$$ بردار خطا را معادل بردار نویز درنظر می گیریم

(تقریب)

e = نویز + تقریب مدل + نویز حاصل از سنسور خطای مدلسازی

$$\hat{y} = \Phi \hat{\theta}$$

PdPtec

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$y = \phi\theta + e \qquad \text{مدل اصلی}$$

$$\begin{cases} \hat{y} = \phi\hat{\theta} + e' \\ \hat{y} = \phi.\hat{\theta} \end{cases}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mu_{\underline{x}} = E(\underline{x}) = \begin{bmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \\ E(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{x_1} \\ \mu_{x_2} \\ \vdots \\ \mu_{x_n} \end{bmatrix}$$

$$Cov(\underline{x}) = E\left[(\underline{x} - \mu_{\underline{x}}) \cdot (\underline{x} - \mu_x)^T\right]$$

$$= \begin{bmatrix} E(x_1 - \mu_{x_1})^2 & E[(x_1 - \mu_{x_1})(x_2 - \mu_{x_2})] & \cdots & E[(x_1 - \mu_{x_1})(x_n - \mu_{x_n})] \\ E(x_2 - \mu_{x_2})(x_1 - \mu_{x_1}) & E[(x_2 - \mu_{x_2})^2] & & \\ \vdots & & \ddots & \\ E[(x_n - \mu_{x_n})(x_1 - \mu_{x_1}) & \cdots & & E[(x_n - \mu_{x_n})^2] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \delta^2_{x_1} & Cov(x_1, x_2) & \cdots & Cov(x_1, x_n) \\ Cov(x_2, x_1) & \delta^2_{x_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ Cov(x_n, x_1 & & & \delta^2_{x_n} \end{bmatrix}$$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

ماتریس همبستگی :

$$R_{\underline{x}} = E\left[\underline{x} \cdot \underline{x}^T\right] = \begin{bmatrix} E(x_1^2) & E(x_1, x_2) & \cdots & E(x_1, x_n) \\ & E(x_2^2) & & \\ & & \ddots & \\ E(x_n \cdot x_1) & & & E(x_n^2) \end{bmatrix}$$

$$E(x_1, x_2) = R(x_1, x_2) = Cov(x_1, x_2) + E(x_1) \cdot E_2(x_2)$$

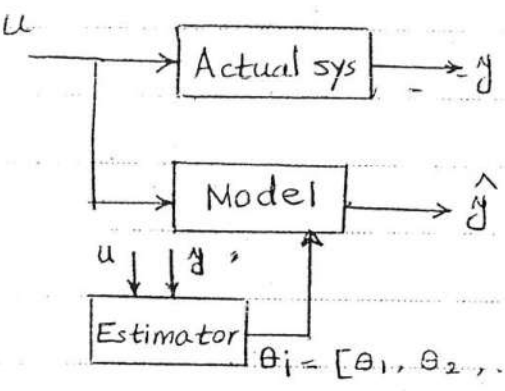
matlab : $Cov(x_1, x_2)$

$Corr(x_1, x_2)$

Subject:
Year. Month. Date.

جلسه یازدهم

۱- آیا با تغییر u بازهم مدل ساخته شده بر اساس u و y مورد استفاده قبلی مدل خروجی است؟



۲- چه ورودی تضمین کننده این است که مدل ما مدل خروجی خوبی باشد.

۳- اساساً مدل خوب چیست؟

به منظور اعتبار سنجی validation input

یک یا چند سری از ورودی های مورد نظر ماست که مدل سیستم باید با این ورودی ها خروجی مناسب ایجاد کند.

توجه: اگر به ازای یک ورودی سیستم کارکرد خوب بود با تغییر ورودی امکان دارد سیستم کاملاً خوب نباشد و عوض نشود.

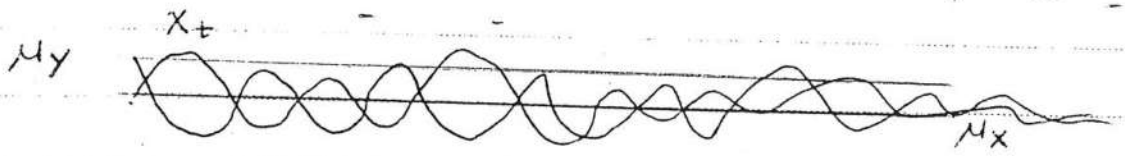
Variance: $\sigma_x^2 = E(x^2) - E^2(x) = E(x - M_x)^2$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

Covariance : $\sigma_{xy} = cov(X,Y) = E\left[(X-\mu_X)\cdot(Y-\mu_Y)\right]$

کوواریانس شباهت دو سیگنال را نشان می‌دهد.

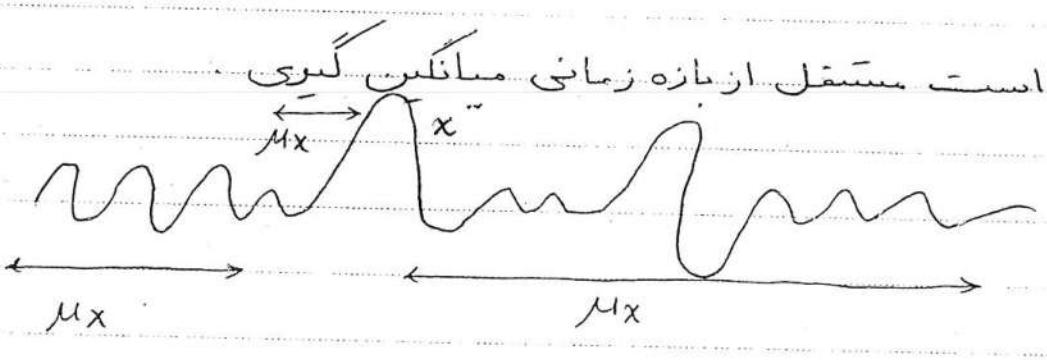


$$\underline{x} = [x_1, x_2, x_3 \dots x_N]$$

$$\mu_{\underline{x}} = [\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots \mu_{x_N}]$$

(ایستا) Stationary process

مثال - نویز سفید که دارای میانگین صفر $\mu_{\underline{x}} = [\mu_x \mu_x \mu_x]$ برای سیستم‌های ایستا است مستقل از بازه زمانی میانگین گیری.



$$cov(x,x) = E\left[(\underline{x}-\mu_{\underline{x}})\cdot(\underline{x}-\mu_{\underline{x}})^T\right]$$

$n\times 1$ $\quad$ $1\times n$

$$cov(x) = \begin{bmatrix} E[(x_1-\mu_{x_1})^2] & E[(x_1-\mu_{x_1})(x_2-\mu_{x_2})] & \cdots & E[(x_1-\mu_{x_1})\cdot(x_n-\mu_{x_n})] \\ E[(x_2-\mu_{x_2})(x_1-\mu_{x_1}) & E[(x_2-\mu_{x_2})^2] & \cdots & E[(x_2-\mu_{x_2})\cdot(x_n-\mu_{x_n})] \\ \vdots & & & \\ & & & E[(x_n-\mu_{x_n})^2] \end{bmatrix}$$

Subject:

Year. Month. Date.

$$COV(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & COV(X_1, X_2) & \cdots & COV(X_1, X_n) \\ COV(X_2, X_1) & \sigma_{x2}^2 & & \\ \vdots & & & \\ & & & \sigma_{xn}^2 \end{bmatrix}$$

بردار X می‌تواند مقادیر اندازه‌گیری یک سیگنال باشد. (مثلاً سیگنال خطا)

ماتریس همبستگی $\Rightarrow R_X = E(\underline{X} \cdot \underline{X}^T) = \begin{bmatrix} E(X_1)^2 & E(X_1, X_2) & \cdots & E(X_1, X_n) \\ E(X_2, X_1) & E(X_2)^2 & \cdots & E(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & E(X_n)^2 \end{bmatrix}$

$$E(X_1, X_2) = R(X_1, X_2) = COV(X_1, X_2) + \mu_{X_1} \cdot \mu_{X_2}$$

$$COV(X_1, X_2) = E\left[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})\right] = E\left[X_1 X_2 - \mu_{X_1} X_2 - \mu_{X_2} X_1 + \mu_{X_1}\right.$$

$$COV(X_1, X_2) = E[X_1, X_2] - \mu_{X_1} \cdot \mu_{X_2} = \mu_{X_2} \mu_{X_1} + \mu_{X_1} \cdot \mu_{X_2}$$

$$COV(X_1, X_2) = E(X_1, X_2) - \mu_{X_1} \mu_{X_2}$$

$$COV(X_1, X_2) = R(X_1, X_2) - \mu_{X_1} \cdot \mu_{X_2} \Rightarrow R(X_1, X_2) = COV(X_1, X_2) + \mu_{X_1}$$

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \mu_e = \begin{bmatrix} \mu_{e1} \\ \mu_{e2} \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{صفر باشد}]{\text{میانگین نویز}} \mu_e = 0$$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

$$Con(e) = \begin{bmatrix} \sigma_{e_1}^2 & Con(e_1,e_2) & \cdots & Con(e_1,e_N) \\ Con(e_2,e_1) & \sigma_{e_2}^2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \\ & & & \sigma_{e_N}^2 \end{bmatrix} = Re$$

ماتریس Re : همبستگی نویز با مماثلین صفر

$$\begin{bmatrix} E(e_1)^2 & E(e_1,e_2) & \cdots & E(e_1,e_N) \\ E(e_2,e_1) & \cdots & & E(e_2,e_N) \\ & & & E(e_N)^2 \end{bmatrix}$$

$$Re = Con(e) + M_e \cdot M_e^T \xrightarrow{M_e=0} Re = Cove$$

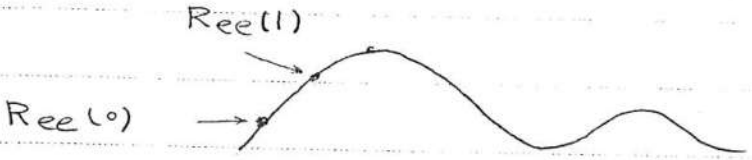
تابع خودهمبستگی : $R_{ee(0)} = E(e_1^2) = E(e_2)^2 = E(e_3)^2 = \cdots = E(e_N)^2$

یعنی همبستگی را با خودشان

حساب می کنیم .

$$R_{ee(1)} = E[e_1 \cdot e_2] = E[e_2 \cdot e_3] = \cdots = E[e_N \cdot e_{N-1}]$$

$$R_{ee(2)} = E[e_2, e_3] = E[e_3, e_4] \cdots$$



Subject :
Year. Month. Date. ( )

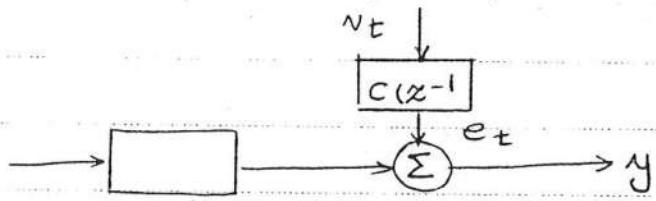
$$R_e = Cov(e) = \begin{bmatrix} R_{ee}(0) & R_{ee}(1) & \cdots & R_{ee}(N-1) \\ R_{ee}(1) & R_{ee}(0) & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ R_{ee}(N-1) & \cdots & & R_{ee}(0) \end{bmatrix}$$

بعد از جایگذاری

اگر e = white noise $\longrightarrow R_e = Cov(e)$

$$\longrightarrow R_e = Cov(e) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & & 0 \\ & \sigma^2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \sigma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ee}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & R_{ee}(0) \end{bmatrix} = \sigma^2 . I_n$$

$e = C(z^{-1}) . v_t$



$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_{ni} z^{-ni}$$

if: $C(z^{-1}) = 1 \longrightarrow e_t = v_t \Rightarrow$ نویز سفید

if $C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} \Rightarrow e_t = (1 + c_1 z^{-1}) . v_t = v_t + c_1 v_{t-}$

$$R_e = Cov(e) = \begin{bmatrix} R_{ee}(0) & R_{ee}(1) & R_{ee}(2) & \cdots & R_{ee}(N-1) \\ R_{ee}(1) & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ R_{ee}(N-1) & \cdots & & & R_{ee}(0) \end{bmatrix}$$

$$R_{ee}(0) = E[e_t^2] = E[(v_t + c_1 v_{t-1})^2] = E[v_t^2 + 2c_1 . v_t . v_{t-1} + c_1^2 v_{t-1}^2$$

$$= E[v_t^2] + c_1^2 . E[v_{t-1}^2] = \sigma^2 + c_1^2 . \sigma^2 = (1 + c_1^2)\sigma^2$$

Subject:

Year. Month. Date.

$$R_{ee}(1) = E(e_t \cdot e_{t-1}) = E\left[(v_t + c_1 v_{t-1})(v_{t-1} + c_1 v_{t-2})\right]$$

$$= E\left[v_t \cdot v_{t-1}\right]$$

$$c_1 E(v_t \cdot v_{t-2}) + c_1 E(v_{t-1}, v_{t-1}) + c_1^2 E(v_{t-1} \cdot v_{t-2}) \ldots$$

$$c_1\sigma^2 + 0 = c_1\sigma^2$$

$$R_{ee}(2) = E(e_t \cdot e_{t-2}) = 0$$

$$R_{ee}(3) = 0$$

$$R_{ee}(N-1) = 0$$

$$Cov(e) = R_e = \sigma \begin{bmatrix} (1+c_1^2) & c_1 & \cdots & 0 \\ c_1 & (1+c_1^2) & c_1 & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & c_1 & (1+c_1^2) \end{bmatrix}$$

$$Cov(e) = R_e = \begin{bmatrix} 1+c_1^2+c_2^2 & c_1(1+c_2) & c_2 & \cdots & 0 \\ c_1(1+c_2) & & & & \\ c_2 & & & & c_2 \\ \vdots & & & & c_1(1+c_2) \\ 0 & & & & 1+c_1^2+c_2^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس کوواریانس θ ← ماتریس کوواریانس = ماتریس همبستگی ← محاسبه توابع همبستگی

برای e با میانگین صفر (صفرشده)

Subject:
Year. Month. Date.

المان های قطری ماتریس کوواریانس θ میزان اعتبار مدل را نشان می دهد. هرچقدر المان های قطری کوچکتر باشند تخمین ها قابل اعتمادترند.

جلسهٔ دوازدهم

پس این کارها را انجام دادیم:

ماتریس کوواریانس θ ← ماتریس کوواریانس ماتریس همبستگی ← محاسبه توابع همبستگی

(ماتریس کوواریانس ماتریس همبستگی: دست می‌آید)

برای e با میانگین صفر (نویز سفید)

المانهای قطری ماتریس $Cov(\theta)$ میزان اعتبار مدل را نشان می دهد هرچه این المان ها کوچک باشد تخمین ها قابل اعتمادترند.

برای محاسبه این دنبال $Cov(\theta)$ بودیم.

$$Cov(\theta) = E(A)\, Cov(\theta)\, E(A^T)$$

در ident : Model risi ، e ها را بررسی می کند که محور افقی sample ها و عمودی Auto corrolation میزان همبستگی.

Ree خطا را با خودش می سنجد.

Subject :

Year . Month . Date . : :

یک cross corrolation داریم که u را با y می سنجد می بینیم که

همبستگی عرضی (u, y)

شباهتشان چگونه است.

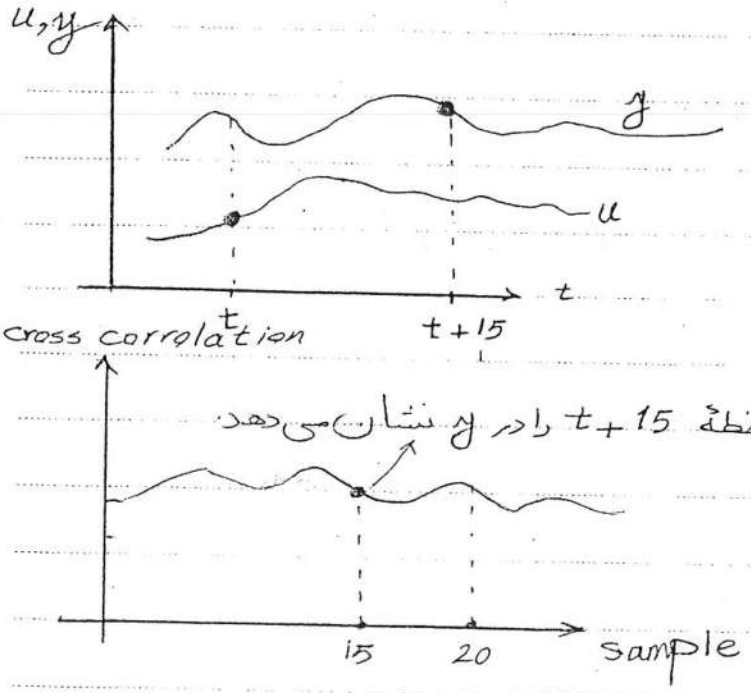
یعنی برای بالایی $R_{ee}(0)\ R_{ee}(1) \ldots R_{ee}(N)$ را کشیده که $R_{ee}(0)$ همان در

sample = 0 حساب کرده و برای پایینی $R_{uy}(0)\ R_{uy}(1) \ldots R_{uy}(N)$ را کشیده و

$R_{uy}(0)$ را حساب می کنیم.

یعنی در شکل زیر اگر u و N به شکل زیر باشند و cross corrolation به

صورت زیر باشد داریم:



اینجا وابستگی لحظه t در u را با لحظهٔ $t+15$ در y نشان می دهد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

توجه: اگر cross corrolation یا Auto corrolation در حاشیه‌ای

که ما انتخاب کردیم باشد در اینصورت modelling ما مناسب

است. در Auto corrolation در sample لحظهٔ صفر = sample

چون همبستگی با خودش است پس یک پرش تا یک داریم و از محدوده

خارج شده است.

قضیه Blue: Best of Linear Unbiased Estimater

می‌خواهد بگوید بهترین تخمین گر چیست. مثلاً اگر نویزها نویز سفید

باشد => OLS بهترین است.

تا اینجا روش‌ها یکباره بود ← برای نویز سفید.

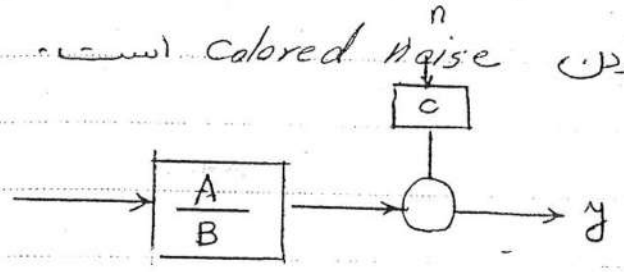
فصل 6 فعلاً حذف است.

برای سیستم‌هایی که خطای آن‌ها نویز رنگی است از روش‌های

تکراری استفاده می‌کنیم. فصل ۷ را شروع می‌کنیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اولین قدم white noise کردن colored noise است.



روش حداقل مربعات تعمیم داده شده تکراری IGLS :

مرحله اول - برای GLS (هنوز وارد تکرار نشده‌ایم)

اگر دینامیک نویز معلوم است ← θ بدون بایاس تعریف می‌شود

با معلوم شدن A , B یا همان θ ← $C(z^{-1})$ بدست می‌آید

یادآوری: دینامیک نویز یعنی یکی از اطلاعات:

$C(z^{-1})$, R_e , R_{ee} ← تابع همبستگی

ماتریس همبستگی

$$R_e(\underline{\theta}) = \begin{bmatrix} E[e_1^2] & \cdots & E[e_1, e_n] \\ & \ddots & \vdots \\ E[e_n, e_1] & & E[e_N^2] \end{bmatrix} \Rightarrow R_e(e) = \begin{bmatrix} R_{ee}(0) & \cdots & R_{ee}(N-1) \\ R_{ee}(1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ R_{ee}(N-1) & \cdots & R_{ee}(0) \end{bmatrix}$$

نکته: ماتریس $R_e(e)$ قطری است.

نکته: اگر $C(z^{-1})$ به صورت $\frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}$ باشد باید شرایطی را داشته باشد که

Subject:

Year. Month. Date. ( )

شرایط پایداری برقرار باشد و درحالت کلی که سیستم به صورت $y = \frac{B}{A}u + \frac{C}{D}v$ باشد باید چندجمله‌ای های A، B، C، D شرایط خاصی داشته باشند تا پایداری سیستم را تضمین کند مثلاً اگر $\frac{C}{D}$ را درنظر بگیریم $\frac{C}{D}$ باید حاوی قطب های پایدار باشد و اگر نباشد نویز رفته رفته زیاد می‌شود که نباید شود.

برای انجام مرحله اول از یک قضیه استفاده می‌کنیم که می‌گوید چون نویز رنگی است نمی‌توان از روش OLS استفاده کرد و ما از روش WLS وزن دار استفاده می‌کنیم. در روش OLS ← تضمین به $\begin{cases} unbiased \\ min\ cov(\theta) \end{cases}$ ما می‌داد ← در این روش می خواستیم $\min \sum e_i^2$ را بدست بیاوریم

در روش WLS به شرط اینکه $W = R_e$ باشد باز: تضمین $\begin{cases} unbiased \\ min\ cov(\theta) \end{cases}$ R_e معلوم

به ما می دهد در این روش می خواهیم:

$\min \sum e_i^2$ را بدست آوریم $\longrightarrow [e_1 \dots e_n] \begin{bmatrix} w_1 & & \\ & \ddots & \\ & & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$

R_e قطری و متقارن مثل

Subject:
Year. Month. Date.

$$y_t = \phi_t - \theta + e_t$$

متقارن Positive Difineng

$$S = e_t^T . w . e_t$$

P.D

If: w: P.D ⟶ Re: P,D

Re یا همان

⟶ نکته: $Re^{-1} = Q^T Q$ چون Re متقارن است.

if: $y = \phi\theta + e \Longrightarrow \underbrace{Qy}_{y^*} = \underbrace{Q\phi}_{\phi^*}\theta + \underbrace{Qe}_{e^*}$

$$\Rightarrow \boxed{y^* = \phi^* \theta + e^*}$$

به معنی این است که در آن ها w داریم.

$$S^* = e^{*T} . e^*$$

برای روش حداقل مربعات داریم

$$\hat{\theta} = (\phi^{*T}\phi^*)^{-1} \phi^{*T} y^* \Rightarrow \hat{\theta} = (\phi^T Q^T Q \phi)^{-1} \phi^T Q^T Q y$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = (\phi^T Re^{-1} \phi)^{-1} \phi^T Re\, y}$$ برای سیستم وزن داده شده

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}_{WLS} = (\phi^T W \phi)^{-1} . \phi^T . W . y = (\phi^T R^{-1} \phi)^{-1} \phi^T R^{-1} y \; ; \; W =$$

$$R(e^*) = E(e^*, e^{*T}) = E\left[(Q.e)(Q.e)^T\right] = E(Q e e^T Q^T) \quad (1)$$

$$= Q . E(e . e^T) Q^T = Q R Q^T = Q . (Q^T Q)^{-1} . Q^T = I$$

e^* نویز سفید است با واریانس 1 .

(1) معلومات ϕ ، R^{-1} معلوم فرض شده است

مثال - این روش برای پیاده سازی روی ARMAX

مدل ARMAX $A(z^{-1}) y_t = B(z^{-1}) . u(t) + C(z^{-1}) v_t$

$$\Rightarrow \frac{A}{C} y_t = \frac{B}{C} u + v_t \Rightarrow A\left(\frac{1}{C} y_t\right) = B\left(\frac{1}{C} u\right) + v_t$$

$$\Rightarrow \underbrace{A y'_t = B u'(t) + v_t}_{\text{مرحله اول انجام شد}} \Longrightarrow \text{ورودی ها عوض شد} \begin{cases} u'_t = \frac{1}{C} u_t & \text{ورودی فیلتر شد.} \\ y'_t = \frac{1}{C} y_t & \text{خروجی فیلتر شد} \end{cases}$$

$$y'_t = \left[-y'_{t-1} \; \cdots \; -y'_{t-n} \mid u'_t \; \cdots \; u'_{t-m}\right] \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \hline b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\theta}$$

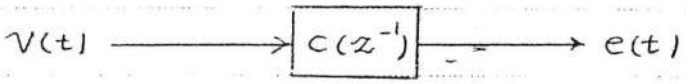
نکته: اگر دینامیک نویز یعنی $C(z^{-1})$ معلوم باشد فیلترها معلوم هستند

و می توانیم از OLS استفاده کنیم و بهترین تخمین بدون بایاس و با حداقل

$Cov(\theta)$ بدست بیاوریم .

Subject :
Year . Month . Date . ( )

تا اینجا فقط نویز را سفید گردیم هنوز وارد روش تکرار نشدیم .



$e(t)$ را داریم و می دانیم $v(t)$ نویز سفید است و به دنبال $C(z^{-1})$ هستیم .

$$D(z^{-1}) = \frac{1}{C(z^{-1})} = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_n z^{-n}$$

$$e = C(z^{-1})\, v \Rightarrow v_t = \frac{1}{C(z^{-1})} \cdot e_t \Rightarrow v_t = D(z^{-1}) \cdot e_t$$

$$v_t = (1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{n\alpha} z^{-n\alpha})\, e_t$$ این هم نویز سفید است .

$$\Rightarrow \quad e_t = \underbrace{\begin{bmatrix} -e_{t-1} & -e_{t-2} & \dots & -e_{t-n\alpha} \end{bmatrix}}_{\text{اینها را داریم}} \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n\alpha} \end{bmatrix}}_{\theta} + v_t$$

e_t این را هم داریم

$$e_t = y_t - \hat{y}_t$$

دینامیک نویز $\Rightarrow$ e بدست می آید $\Rightarrow$ d بدست می آید $\Rightarrow$ با استفاده از LS . بدست می آید

Subject:

Year. Month. Date.

Subject:
Year. Month. Date.

جلسه سیزدهم

تکلیف 6 : مطلوبست تهیه برنامه محاسبات شناسایی به روش یکباره برای سیستم واقعی.

روش یکباره LS on shot

روش تکراری

روش بازگشتی ،

بردار φ تشکیل داده و از روابط LS و

$$\theta = (\varphi^T \varphi)^{-1} . \varphi^T$$

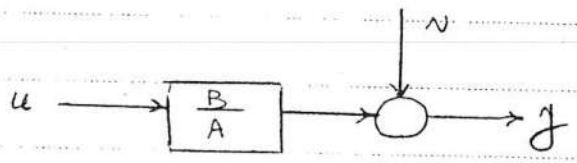
$$y = \theta + e$$

$$\varphi = [-\hat{y}_{t-1}, \dots,]$$

$\hat{\theta}$

تکلیف 7 : با داشتن یک سیستم که بصورت ARMAX مدلسازی شده

پارامترها را شناسایی کنید و بررسی کنید آیا تخمین یکباره بایاس دارد یا نه.



$$y = \frac{B}{A} u + N$$

$\hat{B}$, $\hat{A}$

$$\frac{B}{A} = \frac{q^{-1} . (1 + 0.1 q^{-2} + \dots)}{1 + q^{-1} + 0.3 q^{-2} + \dots}$$

تکلیف 7 : تعریف یک سیستم خطی و افزودن یک نویز رنگی به آن با

تعریف c مشخص بطوریکه مدل ARMAX بر سیستم حاکم باشد.

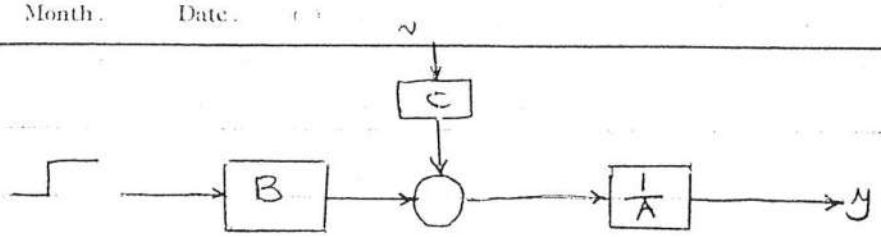
نشان دهید آیا شناسایی پارامترها دارای بایاس است یا خیر.

هفته بعد.

92, 9, 4

Subject:

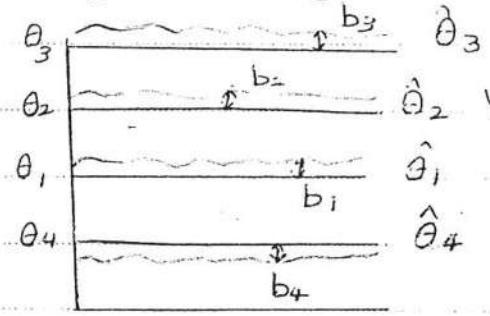
Year. Month. Date.

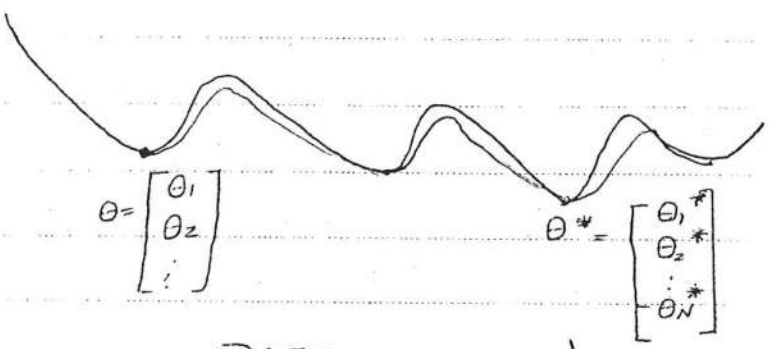


$$c = 1 + q^{-1}$$

$u = [\quad\quad]$

$y = [\quad\quad]$





سایت Daisy

روش Iterative Generalized Least square : IGLS

۰ - فرض می کنیم سیستم ARX است یک تخمینی از $\hat{A}$, $\hat{B}$ بدست می آوریم.

۱

۱- براساس $\hat{A}_{k-1}$. $\hat{B}_{k-1}$ (همان اطلاعات مرحله ۰) $\leftarrow \hat{e}_t$ بدست می آید.

$$\hat{e}_t = \hat{A}_{k-1} \cdot y_t - \hat{B}_{k-1}\, u_t$$

$t = 1, 2, \ldots$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

۲- از معادله رگرسیون زیر $\hat{D}(z^{-1})$ همان دینامیک نویز است تخمین

$$\hat{e}_t = [-\hat{e}_{t-1} \quad -\hat{e}_{t-2} \quad \cdots \quad -\hat{e}_{t-nd}] \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{nd} \end{bmatrix} + \nu_t$$

می زنیم

۳- با فرض داشتن D از مرحله 2 گام های تکراری زیر را انجام می دهیم.

(3_1) : ورودی و خروجی واقعی را از فیلتر $\hat{D}(z^{-1})$ عبور می دهیم.

$$y_t \longrightarrow \boxed{D(z^{-1})} \longrightarrow y'_t$$

$$u_t \longrightarrow \boxed{D(z^{-1})} \longrightarrow u'_t$$

(3_2) : u' و y' را در ساختار GLS قرار می دهیم پارامترهای سیستم را شناسایی

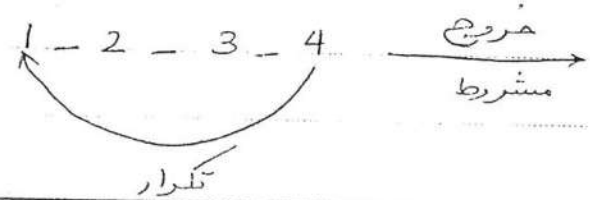
می کنیم. $A(z^{-1}) \cdot y'_t = B(z^{-1}) \cdot u'_t + \nu_t$

(3_3) : تخمین $\hat{A}_k$ ، $\hat{B}_k$ بدست می آید (با Ls)

۴- با گذاشتن یک شرط روش تکرار را در موقع مناسب متوقف می کنیم مثلاً

(وقتی پارامترها هم یک مقدار مشخص همگرا شده و تغییر زیادی نمی کنند)

شرط را خودمان براساس سیستم مورد بررسی باید تعیین کنیم.

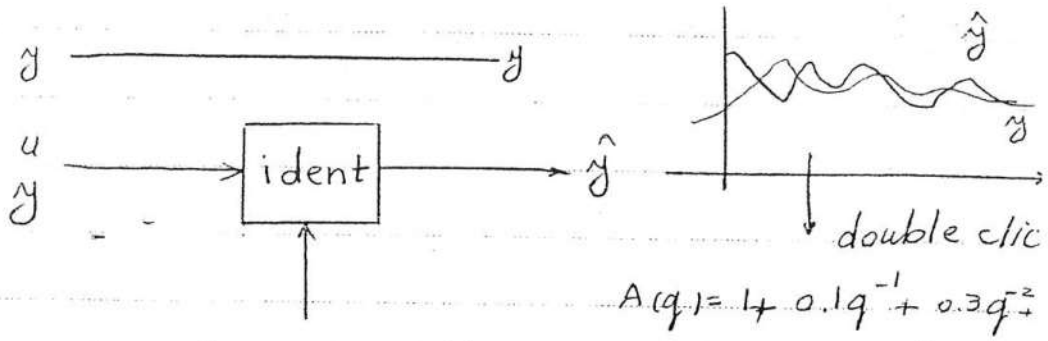


Subject:

Year: Month: Date: ( )

جلسه چهاردهم

ident



ساختار مدل (مرتبه مدل)

نوع مدل

$$A(q) = 1 + 0.1q^{-1} + 0.3q^{-2}$$

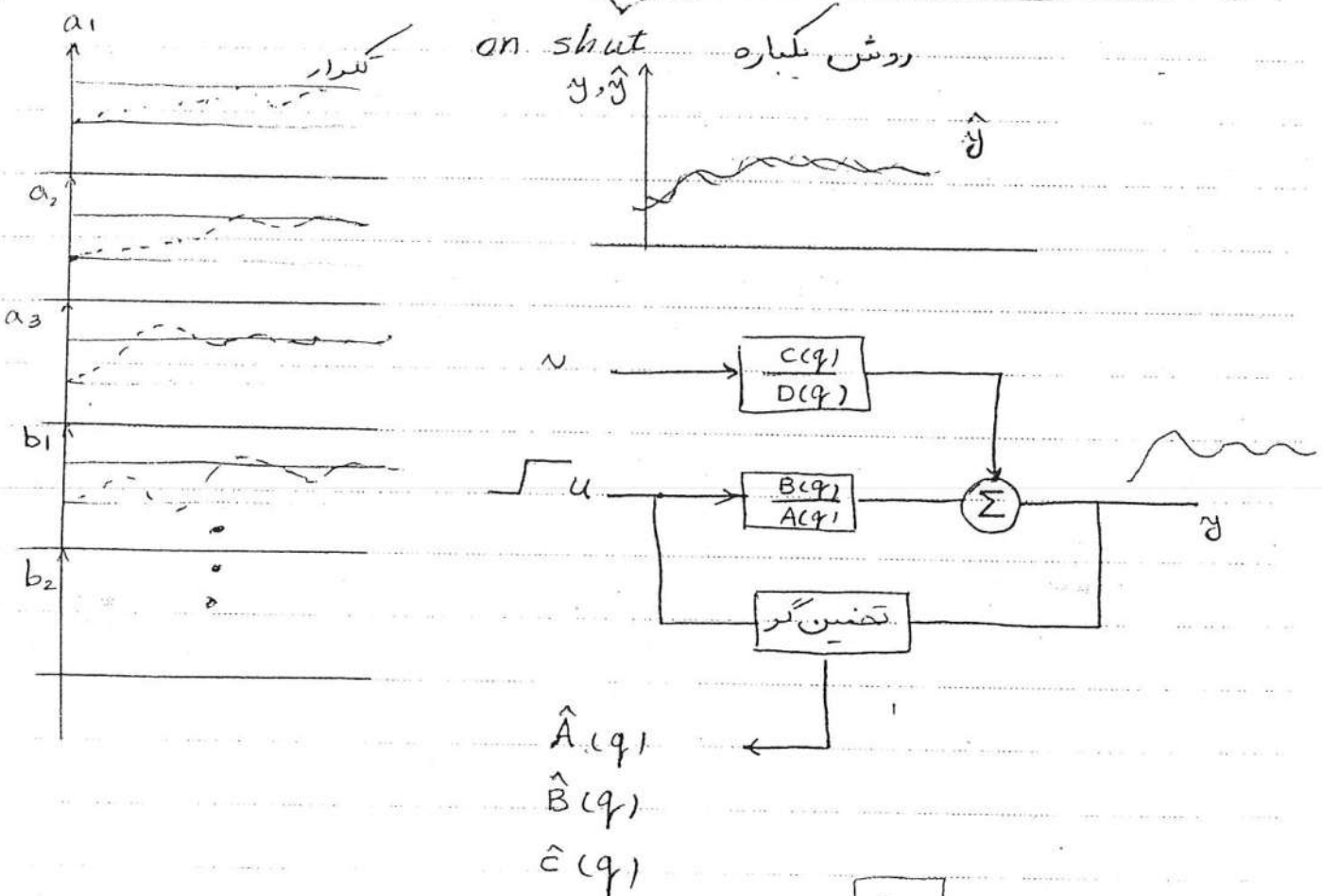
$$B(q) = 0.3 + 2q^{-1} + \dots$$

$$C(q) = 1 + 0.001q^{-1} + \dots$$

روش یکباره

on shut

کنترل



BJ

ARX

NARMAX غیرخطی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سیستم اصلی = 50 مرتبه

فرض مرتبه سیستم = 5 مرتبه

θ برای مرتبه 5 = $\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$ ≡ θ های تقریبی از سیستم
کاهش مرتبه

IELS: iterative Extended Least square:
PEM: Prediction error method
} IML

IML: Iterative maximum Likelihood روش حداکثر احتمال وقوع تکرار

$A(z^{-1})$: $y_t = B(z^{-1}) \cdot u_t + C(z^{-1}) \cdot v_t$

v_t ↓ e_t نویز سفید

$$y_t = \left[-y_{t-1} \cdots -y_{t-n} \mid u_t \cdots u_{t-m} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \hline b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} + e_t$$

فرض $\frac{B}{A}$: $\frac{[m]}{[n]}$ مرتبه

حداقل مربعات توسعه یافته: $y_t = \left[-y_{t-1} \cdots y_{t-n} \mid u_t \right.$

بسط: $e_t = C(z^{-1}) \cdot v_t = v_t + c_1 v_{t-1} + \cdots + c_l v_{t-l}$

$$e_t = \left[c_1 v_{t-1} + \cdots c_l v_{t-l} \right] + v_t$$

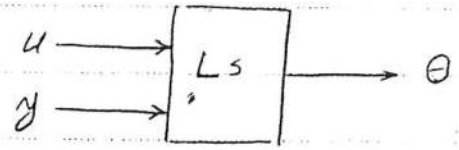
اگر e_t نویز سفید باشد تخمین OLS بهترین تخمین و بدون بایاس است

Subject:

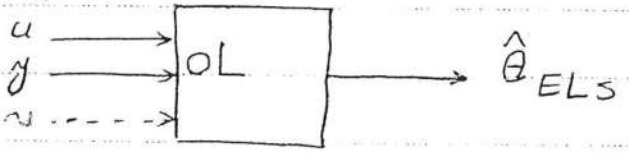
Year. Month. Date. ( )

$$y_t = [-y_{t-1} \cdots -y_{t-n} \mid u_t \cdots u_{t-m} \mid v_{t-1} v_{t-2} \cdots v_{t-l}] \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{matrix} + v_t$$

θ_{EL} جدید:



قبلا



جدید

چون v_{t-i} را نداریم پس تخمین OLS اعمالی به مدل جدید تقریب

خواهد داشت و مجبوریم روش تکرار IELS را به کار ببریم تا هربار پارامترها

دقیق‌تر دست پیدا کنیم.

روش نیوتن رافسون:

مطلوبست: $\min S$ با مجهولات θ $\longrightarrow$ $\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_{i-1} - \left[S''(\hat{\theta}_{i-1})\right]^{-1} \cdot S'(\hat{\theta}_{i-1})$

θ ها باید طوری انتخاب شوند که S می‌نیمم شود.

$$S'(\theta) = \frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta}, \quad S''(\theta) = \frac{\partial^2 S(\theta)}{\partial \theta^2}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_{i-1} - \left[S''(\hat{\theta}_{i-1}) \right]^{-1} \cdot S'(\hat{\theta}_{i-1})$$

$$S'(\theta) = \left[\frac{\partial s}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial s}{\partial a_n} \;\middle|\; \frac{\partial s}{\partial b_1} \cdots \frac{\partial s}{\partial b_m} \;\middle|\; \frac{\partial s}{\partial c_1} \cdots \frac{\partial s}{\partial c_l} \right]$$

$$S = \frac{1}{2} V^T \cdot V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \Longrightarrow \frac{\partial s}{\partial a_i} = \sum v_t \cdot \frac{\partial v_t}{\partial a_i}$$

محاسبه v : فرض کنید مدل ARMAX داریم :

$$A(z^{-1}) \cdot y_t = B(z^{-1}) \cdot u_t + C(z^{-1}) v(t)$$

$$y_t + a_1 y_{t-1} + \cdots + a_n y_{t-n} = b_0 u_t + b_1 u_{t-1} + \cdots b_m u_{t-m} + c_1 v_{t-1} + \cdots + c_l v_{t-l} + v_t$$

$t=1 \longrightarrow y_1 = b_0 u_1 + v_1$

$t=2 \longrightarrow y_2 + a_1 y_1 = b_0 u_2 + b_1 u_1 + v_2 + c_1 v_1$

$t=3 \longrightarrow y_3 + a_1 y_2 + a_2 y_1 = b_1 u_3 + b_1 u_2 + b_2 u_1 + v_3 + c_1 v_2 + c_2 v_1$

$\vdots$

$t = N$ . . . . .

Subject :

Year . Month . Date . ( )

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ a_1 & 1 & \\ a_2 & a_1 & \\ & & \\ 0 & & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_N \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 & 0 & \cdots \\ b_1 & b_0 & \cdots \\ b_2 & b_1 & \cdots \\ b_m & & \\ 0 & b_2 & b_1 \end{bmatrix}}_{N} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ c_1 & 1 & \\ c_2 & c_1 & 1 \\ & & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{N} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

$$A.\underline{y} = B.\underline{u} + C\underline{v}$$

$$\underline{\hat{v}} = C^{-1}_{i-1} \left[\hat{A}_{i-1} . \underline{y} + \hat{B}_{i-1} . \underline{u} \right]$$

ادامه در کتاب مطالعه شود. 207 → 209

الگوریتم :

مرحله ۰ : تخمین تقریبی θ

مرحله ۱ : $\hat{v}_K = (c_{K-1})^{-1} (\hat{A}_{K-1} . \underline{y} - \hat{B}_{K-1} . \underline{u})$

مرحله ۲ : v_t ، y_t ، u_t را از فیلتر $\frac{1}{\hat{c}(z^{-1})}$ عبور می دهیم و داده‌های جدید v'_t ، y'_t ، u'_t را بدست می آوریم.

مرحله ۳ : $\hat{\theta}_K = \hat{\theta}_{K-1} + \left[\sum \left(-\frac{\partial v_t}{\partial \theta} . -\frac{\partial v_t}{\partial \theta} \right)^T \right]^{-1} .$

$$\left[\sum_{t=1}^{N} \left(-\frac{\partial v_t}{\partial \theta} \right) . \hat{v}'_t \right]$$

Subject:

Year. Month. Date.

$$\begin{cases} C(z^{-1}) \cdot \dfrac{\partial v_t}{\partial a_i} = y_{t-i} \\ C(z^{-1}) \cdot \dfrac{\partial v_t}{\partial b_i} = -u_{t-i} \\ C(z^{-1}) \cdot \dfrac{\partial v_t}{\partial c_i} = -v_{t-i} \end{cases} \qquad \boxed{C(z^{-1}) \cdot \frac{\partial v_t}{\partial \underline{\theta}} = -\phi_t}$$

مرحله ۳ :

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \left[\sum_{t=1}^{N} \phi'_{-t} \cdot \varphi'^{T}_{t} \right] \cdot \left[\sum_{t=1}^{N} \varphi'_t \cdot \hat{v}'_t \right]$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_1 \\ \vdots \\ c_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \qquad [(n+m+l) \times N] \; [N \times 1]$$

سوال - v اولیه را چه چیز در نظر بگیریم.

$$y_t = \left[-y_{t-1} \cdots -y_{t-N} \mid u_t \cdots u_{t-m} \mid v_{t-k} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \hline b_1 \\ \vdots \\ \hline c_1 \\ \vdots \end{bmatrix} + v_t$$

$$\theta = (\varphi^T \varphi)^{-1} \cdot \varphi^T y$$

$$y = \left(-y_{t-1} \cdots -y_{t-n} \mid u_t \cdots u_{t-m} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \hline b_1 \\ \vdots \end{bmatrix} + v$$

$\hat{y}_1$

y_2 $\qquad y - \hat{y} = e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$ تکرار

Subject:
Year. Month. Date.

جلسه پانزدهم

تمرین مباحث گذشته، مطالب تکمیلی درمورد SID

شناسایی تکراری ← شناسایی یکباره LS ← شناسایی کلاسیک

← شناسایی بازگشتی

لایه اول شناسایی

Fault detection & Diagnosis FDS شناسایی خطا

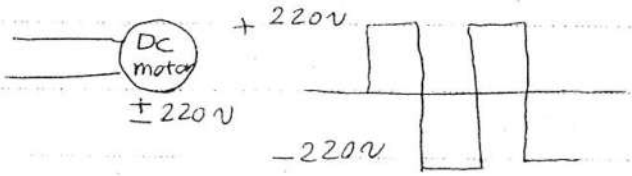
سیگنال تحریک exciting signal :

u → actual sys → اولین مسئله اینست که نویز داریم

۱- نویز تنها آزادی عمل در اعمال ورودی می باشد.

$\frac{\text{signal}}{\text{noise}}$ هرچه بزرگتر باشد اثر سیستم به سیگنال ورودی غالب است.

① min Permissive input ≤ محدود سیگنال ورودی ≤ max Permissive input



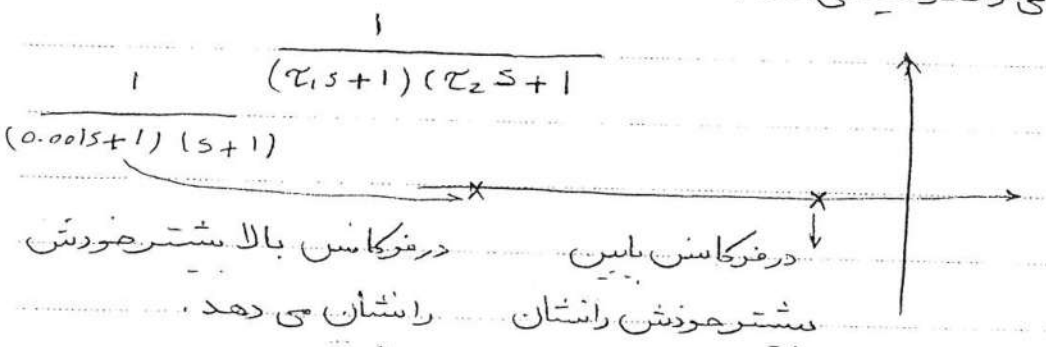
Subject:
Year. Month. Date.

② باید محدودیت عملکرد این سیستم رعایت شود. safety restrictions

③ اگر سیستم درحالت عملکرد عادی باشد (درحال کار)، تغییرات خیلی کم مجاز خواهد بود.

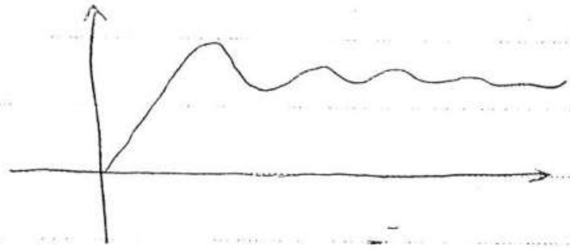
④ اگر سیستم فرکانس خاص یا رنج فرکانسی خاصی تحریک شود مدل بدست آمده درهمان حوزه فرکانسی اعتبار ویژه دارد و ممکن است برای فرکانس های دیگر مدل مفیدی باشد. مثلاً اگر ورودی سینوسی با یک فرکانس باشد مدل درهمان فرکانس مدل خوبی است.

⑤ اگر رفتار استاتیک سیستم مهم باشد سیگنال تحریک می تواند فرکانس فرکانس پایین باشد. در اینصورت سیگنال تحریک فرکانس های پایین سیستم اصلی را تحریک می کند.



مقدار بهره یعنی رفتار استاتیکی.

Page



مقدار استاتیک یعنی مقدار ماندگار سیستم.

$$\lim_{s\to 0} \frac{R}{1+G(s)} \cdot s$$

اگر بخواهیم دینامیک یک سیستم را ببینیم باید رفتار فرکانس بالای سیستم را در نظر بگیریم.

⑥ اگر عملکرد سیستم واقعی فقط در یک فرکانس خاص باشد سیگنال تحریک را برابر همان فرکانس می دهیم.

⑦ اگر مدل سیستم برای مقاصد کنترلی مورد استفاده است فرکانس‌های حول فرکانس نایکوئیست بهترین گزینه هستند. (اهمیت ویژه دارند). (برای پایداری)

⑧ اگر هدف شناسایی سیستم معلوم نیست بهتر است با اعمال نویز سفید که دارای تمام فرکانس ها است سیستم را تحریک کنیم (در صورت امکان).

PRBS Pseudo Rando Binary sequence

نویز سفید را با نویز PRBS ایجاد می کنند ( )

Subject :

Year. Month. Date.

first order system

gain = 1

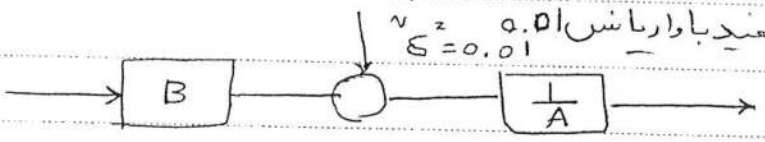
$T = 8\,sec$ $\qquad G(s) = \frac{1}{8s+1}$

sampling time : $T_0 = .1\,sec$ $\longrightarrow s=0 \longrightarrow |G| = \frac{1}{1} = 1 =$ بهره استاتیک

$$y(k) = 0.1175\, u(k-1) + 0.8825\, y(k-1)$$

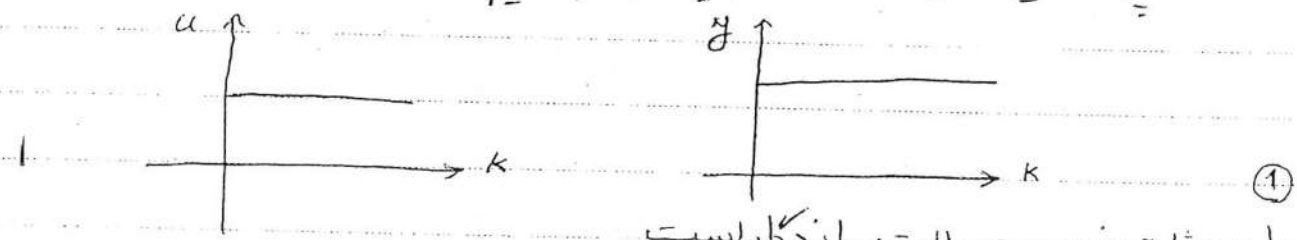
$$\frac{y(k)}{u(k)} = \frac{0.1175\, q^{-1}}{1 - 0.8825\, q^{-1}} = \frac{b_1 q^{-1}}{1 + a_1 q^{-1}}$$

ARX:



$$y = \frac{B}{A}u + \frac{1}{A}\nu \Rightarrow A.y = Bu + \nu$$

چون نویز سفید است با ماس نداریم .



(1) با ورودی ثابت خروجی در حالت ماندگار است

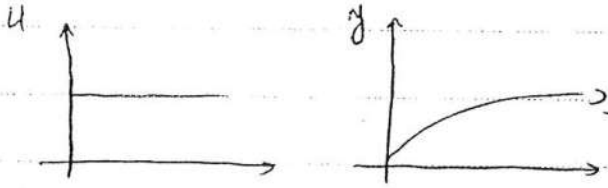
$$\text{بهره } K = \frac{b_1}{1 - a_1}$$

هیچ دینامیکی تحریک نمی‌شود فقط بهره تعیین می‌شود حتی a_1, b_1 تعیین نمی‌شوند.

Subject:
Year. Month. Date.

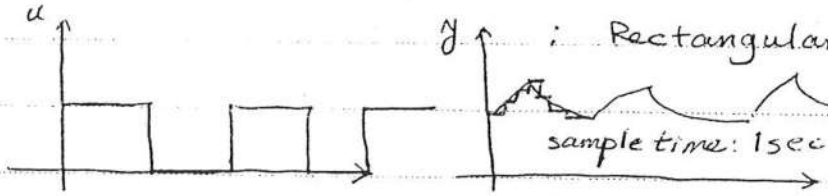
② با ورودی ضربه ، فقط بهره به دقت تعیین می شود

③ ورودی پله : (step) : فرکانس های پایین بخوبی تحریک می شوند



و بهره بدقت تعیین می شود

④ ورودی مستطیلی Rectangular :



بسته به فرکانس موج تحریک مستطیلی یک رنج فرکانسی تحریک

می شود. و ثابت زمانی به دقت بدست می آید.

⑤ سیگنال PRBS برای شناسایی عالی است تمام فرکانس ها را تحریک می کند

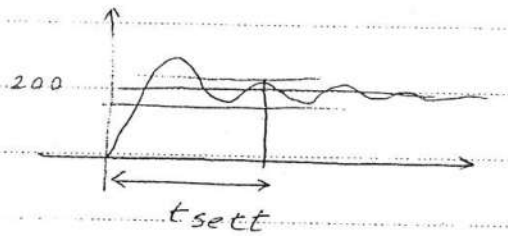
Subject:

Year. Month. Date.

سیستم مرتبه اول:

ورودی تحریک	b_1	a_1	k	T (sec)
Constant	0.26	-0.73	1.004	3.309
Impulse	0.097	-0.85	0.682	6.48
step	0.122	0.87	0.9998	7.68
Rectangular	0.117	-0.88	1.003	8.06
PRBS	0.12	-0.87	0.998	7.79
True process	0.1175	-0.8825	1	8

$\frac{1}{20} T_{sett} < \tau_s < \frac{1}{10} T_{sett}$; matlab



$$A\dot{y} = B.u + v$$

$$\dot{y} = \frac{B}{A} u + \frac{1}{A} v$$

Subject:

Year: Month: Date:

$n = 1$

$d = [0.005, 1]$

$tf[n, d] \longrightarrow \dfrac{1}{2 \cdot 0055 + 1}$

با تنظیم sample time معادل discrete سیستم عوض می شود.

c2d (tf (n, d), 0, 01)

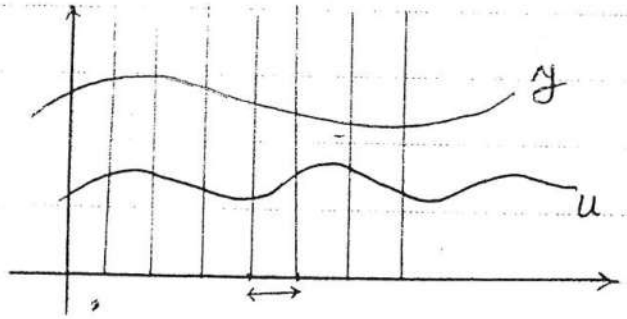
فرکانس سیستم بالا فرکانس نمونه برداری ۱۰ برابر یا ۲۰ برابر فرکانس مدل می گیریم.

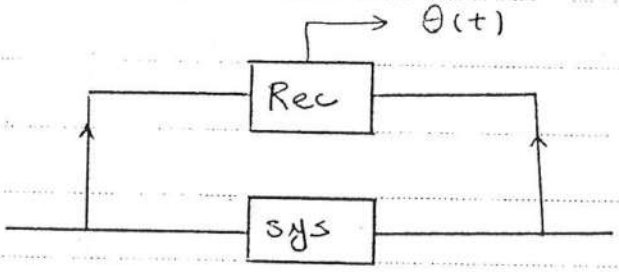
تکلیف 8: انتخاب فرکانس نمونه برداری بالا چه مشکلاتی در بردارد؟

Subject :

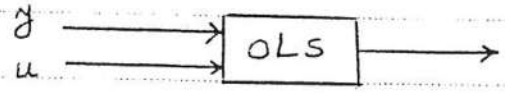
Year . Month . Date :

جلسه شانزدهم



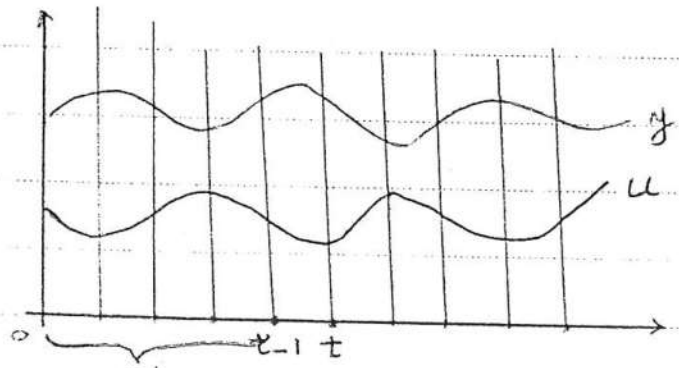


$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \vdots \\ \theta_N(t) \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

فرض می کنیم سیستم SISO است :



$$\begin{bmatrix} \theta_1(t-1) \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix}$$

Subject:
Year. Month. Date.

1. $(t=0 \ \dots \ t=t)$ OLS $\longrightarrow$ تخمین

روش یک روش کوچه بازاری

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \vdots \\ \theta_N(t) \end{bmatrix}$$

2. استفاده از θ قبلی و اطلاعات جدید به منظور بروز کردن θ برای لحظه t.

به جای استفاده از اطلاعات قدیم از θ قدیم استفاده می کنیم.

روی این دو روش کار می کنیم.

۱. RLS

۲. RELS

⋮

۷. ...

$\phi_t \longrightarrow u_t$ بردار رگرسیون

$\phi \longrightarrow U$ ماتریس رگرسیون

$u \longrightarrow x$ ورودی سیستم

$\hat{\theta}_{N+1} = f(\hat{\theta}_N, x_{N+1}, y_{N+1})$ ← یک بخشی از کنترل تطبیقی

$$\boxed{y_t = u_t^T \cdot \theta + e_t}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_N^T \end{bmatrix} \cdot \underline{\theta} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}$$

$y_1 = u_1^T \cdot \theta + e_1$

$y_2 = u_2^T \cdot \theta + e_2$

⋮

$y_N = u_N^T + e_N$

Subject :

Year . Month . Date :

$$\underline{y} = U \cdot \underline{\theta} + \underline{e}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1(1) & u_1(2) & \cdots & u_1(N) \\ u_2(1) & u_2(2) & \cdots & u_2(N) \\ \vdots & & & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\hat{\theta}_N = (U_N^T U_N)^{-1} U_N^T \cdot y_N}$$

از N عدد نمونه برداشته

N باید از تعداد مجهولات (پارامترهای مدل) بیشتر باشد.

$$\underline{y}_{N+1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \\ \hline y_{N+1} \end{bmatrix} \qquad U_{N+1} = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_N^T \\ \hline u_{N+1}^T \end{bmatrix} \qquad \hat{\theta}_{N+1} = (U_{N+1}^T \cdot U_{N+1})^{-1} U_{N+1}^T \cdot y_{N+1}$$

$$\underline{\hat{\theta}}_{N+1} = \underline{\hat{\theta}}_N + k_{N+1} \underbrace{\left(y_{N+1} - \underbrace{\underline{U}_{N+1}^T \cdot \underline{\theta}_N}_{\hat{y}_{N+1}} \right)}_{e_{N+1}}$$

تخمینی از error در لحظه $(N+1)$ به $\underline{\hat{\theta}}_N$ اضافه می کنیم.

$\underline{\hat{\theta}}_{N+1}$ بدست می آید. اینکه k_{N+1} چطور باشد روشهای خاصی دارد

PqPCO

Subject:
Year. Month. Date.

$$\boxed{P_{N+1} \triangleq (U_{N+1} \cdot U)^{-1}}$$ ماتریس تحریک

خیلی مهم است تا سیستم بدحال نشود.

$$\hat{\theta} = \underbrace{(U^T U)^{-1}}_{P} \cdot \underbrace{U^T y}_{B}$$

$$B_{N+1} \triangleq U_{N+1}^T \cdot y_{-N+1} = \left[U_N^T \ \underline{U}_{N+1}\right] \begin{bmatrix} \underline{y}_N \\ y_{N+1} \end{bmatrix} = U_N^T \cdot y_N + {}_{-N+1}$$

قسمت اول ساختن θ

$$\underline{y}_{N+1} = \begin{bmatrix} \underline{y}_N \\ y_{N+1} \end{bmatrix} \qquad U_{N+1} = \begin{bmatrix} \underline{u}_1^T \\ \vdots \\ \underline{u}_N^T \\ \hline \underline{u}_{N+1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_N \\ \underline{U}_{N+1}^T \end{bmatrix}$$

ماتریس کواریانس

$$\boxed{P_{N+1} \triangleq \left[\left[U_N^T \ \underline{U}_{N+1}^T\right] \begin{bmatrix} U_N \\ \underline{U}_{N+1}^T \end{bmatrix}\right]^{-1} = (U_N^T \cdot U_N + U_{N+1} \cdot U_{N+1}^T)^{-}}$$

رابطه در جبر خطی

① $$\boxed{(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot CA^{-1}}$$

$$P_{N+1} = (U_N^T U_N + \underline{U}_{N+1} \cdot \underline{U}_{N+1}^T)^{-1} \xrightarrow{①} A^{-1} = (U_N^T U_N)^{-1} = P_N$$

Subject : 1-

Year . Month . Date . ( )

$$P_{N+1} = P_N - P_N \cdot \underline{U}_{N+1} (I + \underline{U}^T_{N+1} \cdot P_N \cdot \underline{U}_{N+1})^{-1} \cdot U^T_{N+1} \cdot P_N$$

SISO برای سیستم : $P_{N+1} = P_N - \dfrac{P_N \cdot U_{N+1} \cdot \underline{U}^T_{N+1} \cdot P_N}{1 + \underline{U}^T_{N+1} \cdot P_N \cdot \underline{U}_{N+1}}$

K

$$K_{N+1} = \frac{P_N \cdot \underline{U}_{N+1}}{1 + \underline{U}^T_{N+1} \cdot P_N \cdot \underline{U}_{N+1}}$$

$$\longrightarrow P_{N+1} = P_N - K_{N+1} \cdot \underline{U}^T_{N+1} \cdot P_N$$

$$P_{N+1} = (I - K_{N+1} \cdot \underline{U}^T_{N+1}) P_N$$

$$\hat{\underline{\theta}}_{N+1} = (U^T_{N+1} \cdot U_{N+1})^{-1} \cdot U^T_{N+1} \cdot y_{N+1} = P_{N+1} \cdot B_{N+1}$$

$$\hat{\underline{\theta}}_{N+1} = (I - \underline{K}_{N+1} \cdot \underline{U}^T_{N+1}) P_N \cdot [B_N + \underline{U}_{N+1} \cdot y_{N+1}]$$

$$= \hat{\theta}_N - \underline{K}_{N+1} \cdot \underline{U}^T_{N+1} \cdot \hat{\theta}_N + P_N \cdot \underline{U}_{N+1} \cdot y_{N+1}$$

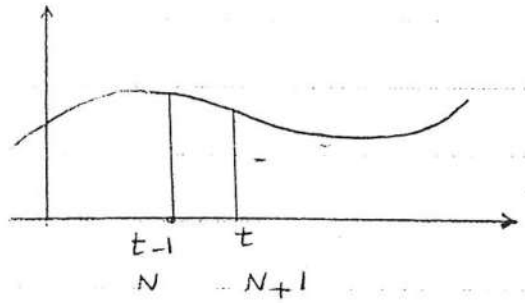
$$- K_{N+1} \underline{U}^T_{N+1} \cdot P_N \cdot \underline{U}_{N+1} \cdot y_{N+1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\underline{\theta}}_{N+1} = \hat{\underline{\theta}}_N + \underline{K}_{N+1} (y_{N+1} - \underline{U}^T_{N+1} \cdot \hat{\underline{\theta}}_N) \\ &\hat{\underline{\theta}}_t = \hat{\theta}_{t-1} + K_t (y_t - U^T_t \cdot \underline{\theta}_{t-1}) \\ &N = t-1 \\ &N+1 = t \end{aligned}}$$

PaPCO

جلسه هفدهم

RLS چندگام دارد:



روش اول: RLS

مرحله صفرم: اعمال θ_0 ، P_0 به الگوریتم

مرحله یکم: x_t ، y_t را می خوانیم

مرحله دوم: تشکیل بردار رگرسیون برای لحظه t

$$u_t^T = [-y_{t-1} \; -y_{t-2} \cdots | x_t \; x_{t-1} \cdots x_{t-m}]$$

مرحله سوم: بردار k_t محاسبه می‌شود.

SISO $\rightarrow$

$$k_t = \frac{P_{t-1} \cdot \underline{u}_t}{1 + \underline{u}_t^T P_{t-1} \cdot \underline{u}_t}$$

مرحله چهارم: θ_t را محاسبه می کنیم:

$$\hat{\underline{\theta}}_t = \hat{\underline{\theta}}_{t-1} + \underline{k}_t (y_t - u_t^T \cdot \hat{\theta}_{t-1})$$

مرحله پنجم: P_t را بروز می کنیم.

$$P_t = (I - k_t u_t^T) P_{t-1}$$

مرحله ششم: تست توقف الگوریتم.

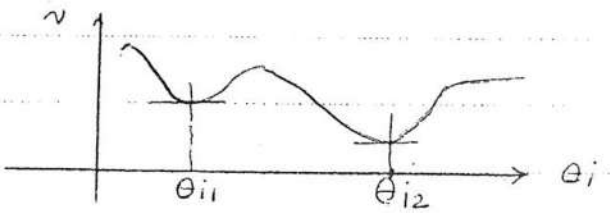
$$\|\hat{\theta}_t - \hat{\theta}_{t-1}\| < \epsilon$$

مرحله ۱

$$V = \sum_i e_i^2$$

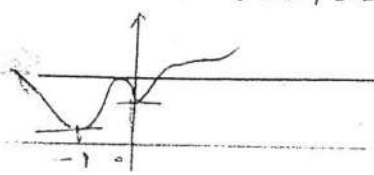
$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix}$$

min



$$V = \theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1^2$$

$$\begin{cases} \frac{dV}{d\theta_1} = \theta_2 + 2\theta_2\theta_1 = 0 \rightarrow \theta_2(1+2\theta \\ \frac{dV}{d\theta_2} = \theta_1 + \theta_1^2 = 0 \rightarrow \theta_1(1+\theta_1) = \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = 0 \;, \; \theta_2 = 0 \\ \theta_1 = -1 \;, \; \theta_2 = 0 \end{cases}$$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

توجه : روش RLS ، درمورد اینکه θ و P چگونه باشند مسائل زیادی وجوددارد.

نکته : تخمین پارامترها بایاس خواهد داشت ← RLS ← اگرنویزرنگی باشد

روش دوم : RLS

مرحله صفر: مقداردهی اولیه P_0 ، θ_0 .

مرحله اول : x_t ، y_t خوانده می‌شوند.

مرحله دوم : تشکیل بردار رگرسیون

مرحله سوم : تشکیل ماتریس P_t .

$$P_t = P_{t-1} - \frac{P_{t-1} \cdot \underline{u}_t \cdot \underline{u}_t^T \cdot P_{t-1}}{1 + \underline{u}_t^T P_{t-1} \cdot \underline{u}_t}$$

k_t قبلی

مرحله چهارم : $\hat{\theta}_t$ محاسبه می‌شود

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \underbrace{P_t \cdot \underline{u}_t}_{k_t \text{ جدید}} (y_t - \underline{u}_t^T \cdot \underline{\hat{\theta}}_{t-1})$$

مرحله پنجم : تست توقف .

روش سوم : RLS

مرحله صفر: مقداردهی اولیه P_0 ، θ_0 .

مرحله اول : x_t ، y_t خوانده می‌شود.

مرحله دوم : تشکیل بردار رگرسیون .

مرحله سوم : محاسبه P_t به روش جدید.

$$P_t = P_{t-1} - \frac{P_{t-1} \cdot \underline{u}_t \cdot \underline{u}_t^T \cdot P_{t-1}}{\sigma^2 + \underline{u}_t^T \cdot P_{t-1} \cdot \underline{u}_t}$$

واریانس خطا

مرحله چهارم : محاسبه $\underline{\hat{\theta}}_t$.

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \left(\frac{P_t \cdot \underline{u}_t}{\sigma^2}\right)(y_t - \underline{u}_t^T \cdot \underline{\hat{\theta}}_{t-1})$$

k جدید

مرحله پنجم : تست توقف

Subject:
Year. Month. Date.

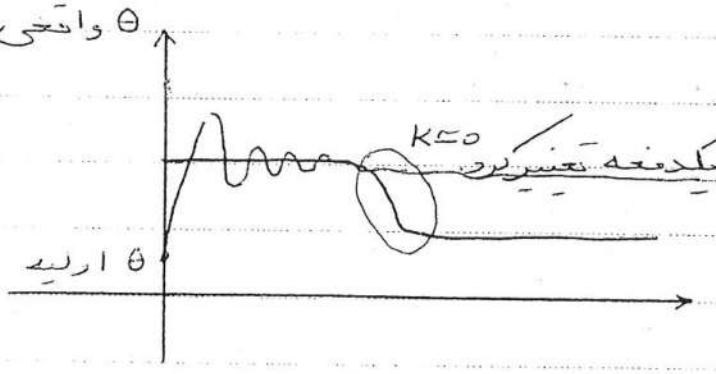
k عددی است که سرعت تغییرات را تعیین می کند.

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + (K \times e)$$

$k \uparrow \leftarrow$ سرعت $\uparrow$

$k \downarrow \leftarrow$ سرعت کم $\downarrow$

با تغییرات k روند همگرا شدن به مقدار واقعی تغییر خواهد کرد.



نمی تواند دنگ کند.

$k = P_t \cdot \underline{u}_t =$

k از این ایجاد می شود

از P مقدار اولیه ایجاد می شود

کوچک می شود

توجه: کوواریانس پارامترها کم یعنی تخمین خوب.

k کم نشود، دیگر نمی توان دنگ کرد، $\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1}$ خطا دارد.

فکر می کند نتیجه مطلوب است همان θ قبلی را

می گیرد.

Subject :
Year. Month. Date. ( )

تخمین اولیه θ_0 و P_0 : اگر هیچ دیدی نسبت به پارامترها نیست صفر در نظر می گیریم.

OLS زده حالت اولیه را تعیین می کنیم.

$$P_0 = KI$$

انتخاب K اگر مناسب باشد

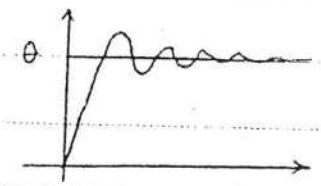
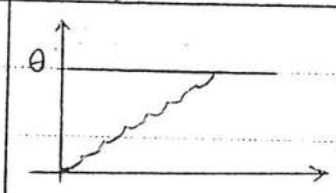
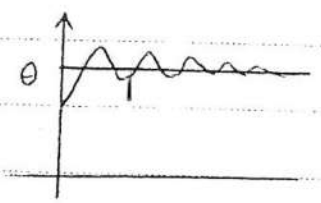
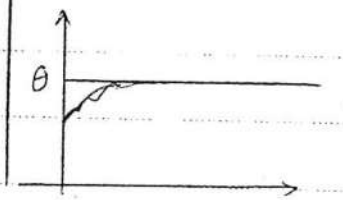
$$P_0 = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

همگرایی بطور ملایم و بدون نوسان

انجام می شود. در غیر اینصورت ممکن است

پارامترها بالا کند (K کوچک) و یا بصورت نوسانی

(K بزرگ) به مقدار واقعی همگرا شوند.

K بزرگ	K کوچک	
		$\hat{\theta}_0 = 0$
		$\hat{\theta}_0 = \theta_{OLS}$

P_t باید مثبت معین و متقارن باشد $P_t = (U^T U)^{-1}$

اگر نویز سفید نباشد بایاس دارد. سفیدسازی نویز انجام می شود و

روش RELS صورت می گیرد.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

جلسه هیجدهم

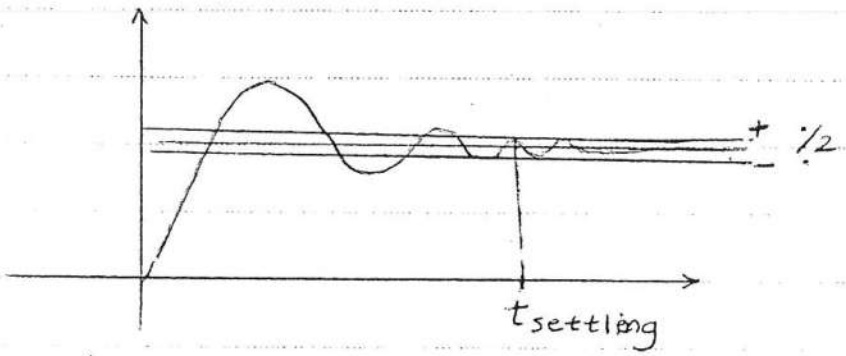
کیفیت مدل	مورد استفاده	مدار
high	فرکانس پایین	مدار مرتبه پایین
low = poor	فرکانس بالا	مدار مرتبه بالا

فرکانس : فرکانس تحریک سیستم

فرکانس سیتلینگ

مشخصه فرکانسی سیستم :

اگر سیستم با سینوسی تحریک شود ← ناپایدار است



$T_s = \frac{1}{10} \times t_{settling\ time}$ ← وقتیکه پله می دهیم

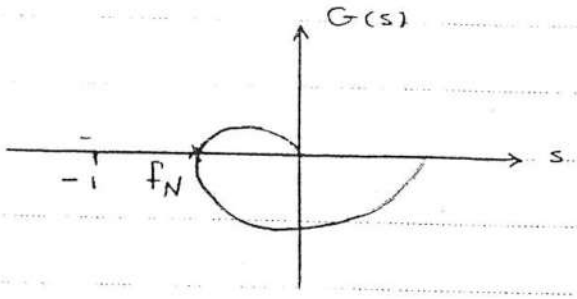
$f_s = 10 \times f_N$ ← سیگنال سینوسی

Subject
Date

فرکانس نایکوئیست :

$\angle G(s) = 180$

$|G| = 1$



سیستم های متغیر با زمان :

۱ سیستم های با تغییرات کند :

تغیرات پارامتر به علت تغییر دما یا هر دلیل دیگری کند صورت می گیرد.

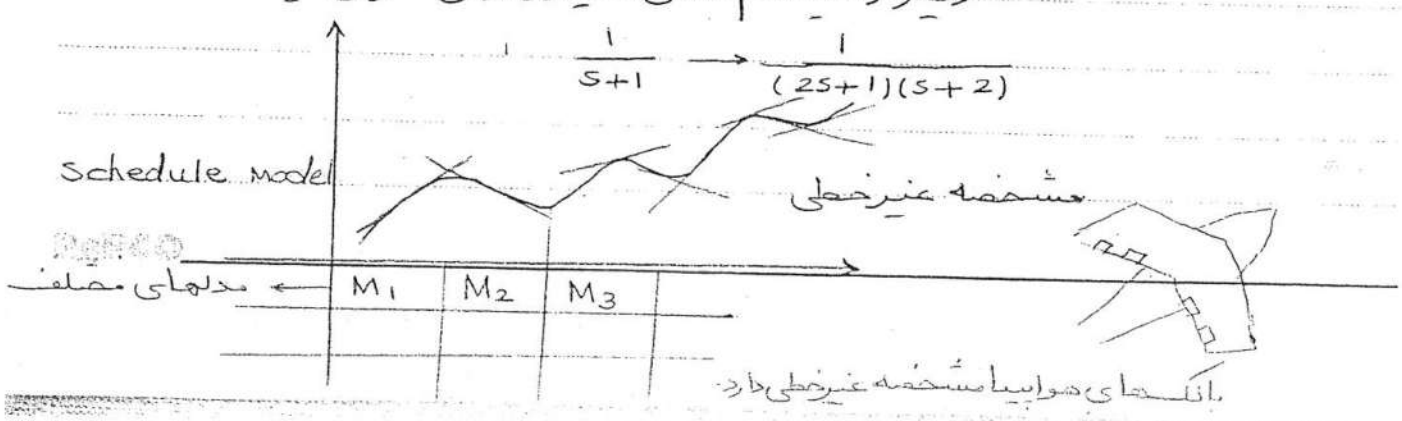
۲ـ سیستم های با تغییرات ناگهانی :

• بدلیل وقوع خطا در سیستم ← قطع فاز یک موتور الکتریکی

• بدلیل تغییر ساختار سیستم ← $\frac{1}{s+1} \rightarrow \frac{1}{(2s+1)(s+2)}$

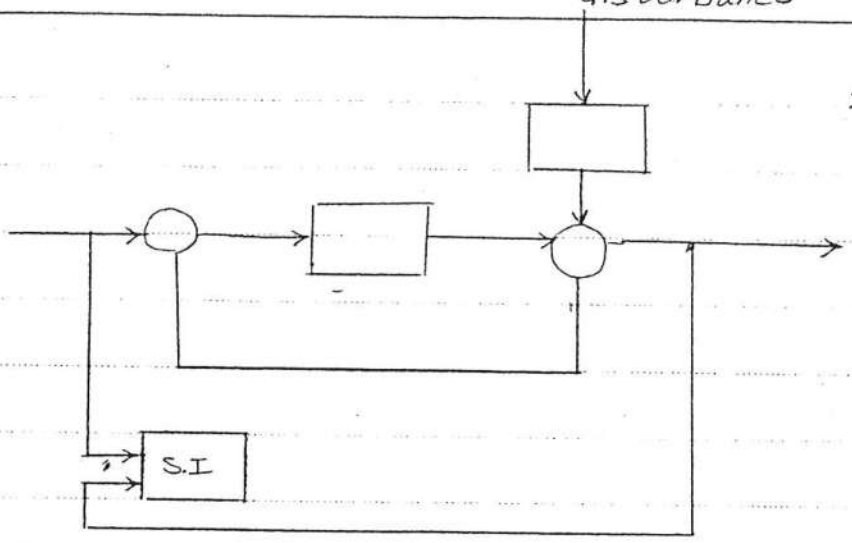
• به دلیل اعمال اغتشاش در سیستم

تغییر ساختار: هواپیما، در ارتفاع پایین یک مدل در ارتفاع بالا مدل دیگر (سیستم های دیگری وی کار می آیند).



Subject
Date

اعمال اغتشاش :



چون مدل عوض می شود تا عدتاً یکباره وتکراری جواب نمی دهد.

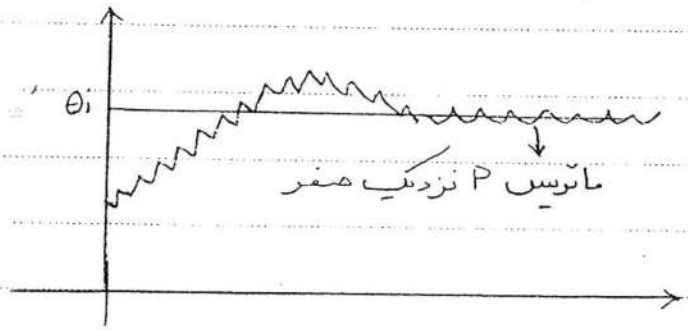
روش بازگشتی :

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + P_t \cdot u_t \cdot (y_t - u_t^T \cdot \hat{\theta}_{t-1})$$

P_t: ماتریسی از ضرایب ماتریس کوواریانس

u_t: بردار رگرسیون

با فرض اینکه خود پارامتر واقعی ثابت است.



برای سیستم هایی که پارامترها ثابت و فرض سفید بودن نویز یا سفید کردن نویز رنگی واستفاده از RLS یا RELS پارامترها

Subject
Date

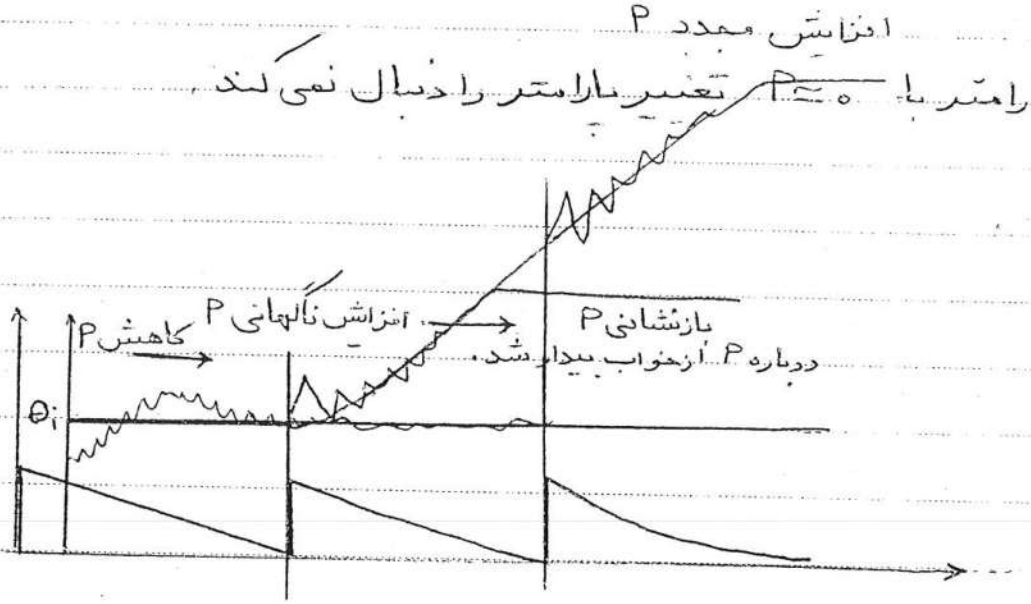
به مقدار واقعی همگرا شوند و $P \to 0$ می رود در نتیجه $\theta_t = \theta_{t-1}$

بعد از همگرایی پاسخ θ_i)

اگر پارامتر θ تغییر کند با توجه به $P \to 0$ دنبال تغییرات پارامتر

نخواهد رفت.

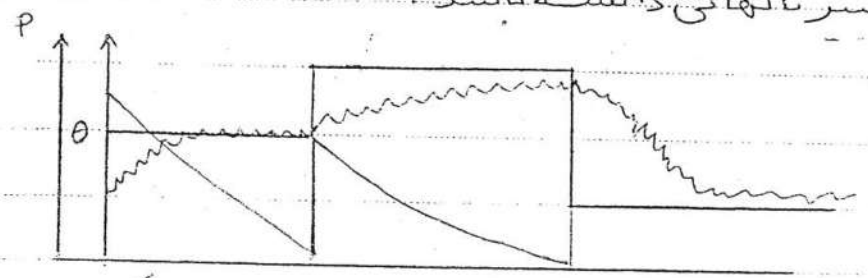
با تغییر پارامتر با $P = 0$ تغییر پارامتر را دنبال نمی کند.



هرچه به θ واقعی می رسیم P کوچک می شود.

تغییر مجدد P باعث نوسان می شود.

اگر سیستم تغییر ناگهانی داشته باشد:



اگر بدانیم کمی تغییر می کند (تغییر ناگهانی) سرعت برای دنبال کردن

تغییرات P را زیاد می کنیم.

Subject
Date

جلسه نوزدهم

مواجهه با سیستم های متغیر با زمان :

۱. بازشانی ماتریس P با استفاده از یک شرط $Trace(P) < \varepsilon$

یا $det(P) < \varepsilon$ به مقدار P_0 .

جمع المان های قطری ← trace

$$\begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

۲. استفاده از ضریب فراموشی λ ثابت نمی گذارد P از یک حدی کوچکتر شود. (از کوچک شدن بیش از حد P جلوگیری می کند)

↓

سیستم همیشه با تغییرات ناگهانی مواجه است.

مزایا : آماگی برای شناسایی تغییرات ناگهانی .

معایب : اگر سیستم دارای پارامترهای ثابت باشد هرگز به مقدار واقعی پارامتر همگرا نمی شود

اگر وردی بله داشته باشیم چون P خیلی کوچک نمی شود می تواند تغییرات ناگهانی را دنبال کند.

Subject
Date

در روش S یک تابع S را معرفی کرده بودیم.

شاخص عملکرد:

$$WLS: \quad S=\sum_{i=1}^{N} w_i e_i^2 \qquad if: w=\lambda^{N-i} \quad 0<\lambda<1$$

شاخص عملکرد $S=\sum_{i=1}^{N} \lambda^{N-i} e_i^2 = \lambda^{N-1} e_1^2 + \lambda^{N-2} e_2^2 + \dots + 1 e_N^2$

توان λ بزرگتر است. پس ضرایب e_i کوچک تری می شوند.

یعنی هرچه جلو می رویم زمانهای گذشته را خطاشون دیده گرفته و

خطاهای زمانهای جلوتر را های لایت می کنیم.

این باعث می شود سیستم را راحت تر شناسایی کنیم.

$\underline{U}_t^T$ رگرسیون $= \left[-y_{t-1} \; -y_{t-2} \dots -y_{t-N} \mid x_t \; x_{t-1} \dots x_{t-m} \right]$

خروجی‌ها — ورودی‌ها

$$P_t = P_{t-1} - \frac{P_{t-1} \cdot \underline{U}_t \cdot \underline{U}_t^T \cdot P_{t-1}}{(\lambda) + \underline{U}_t^T \cdot P_{t-1} \cdot \underline{U}_t}$$

قبلاً این λ را نداشتیم.

Subject
Date

: Forgetting Factor

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \underbrace{\frac{1}{\lambda} P_t u_t}_{k} \underbrace{[y_t - u_t^T \cdot \hat{\theta}_{t-1}]}_{e_t}$$

اضافه

بزرگ شده

$0.9 < k < 1$ معمولاً.

مشکل: با فرض اینکه پارامتر ثابت نباشد هرگز به مقدار واقعی همگرا نمی شود.

انتخاب مقدار λ: در حالت کلی بصورت سعی و خطا می باشد و وابسته به نوع تغییرات پارامترهای سیستم است.

اگر پارامترها تغییرات سریعی دارند: λ کوچکتر مناسب است.

$$S = \lambda^{N-1} e_1 + \lambda^{N-2} e_2 + \dots$$

زودتر میرا

حال های لایت، گذشته بی خیال

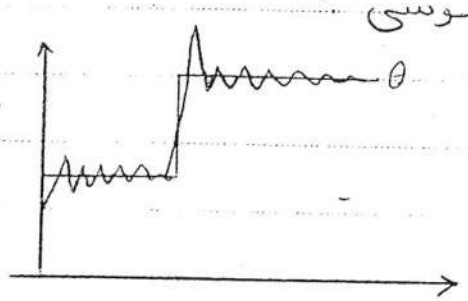
اگر پارامترها تغییر کند دارند λ نزدیک ① انتخاب می شود

به جای اینکه P را یکدفعه به مقدار P_0 باز نشانی کنیم.

(مرحله به مرحله)

Subject
Date

نتیجه سیستم با ضریب فراموشی :

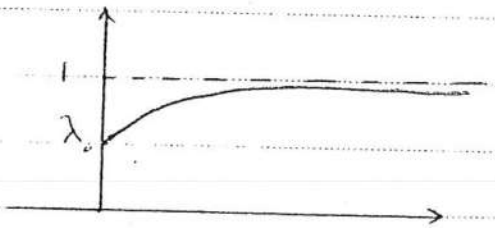


۳ـ استفاده از ضریب فراموشی متغیر با زمان :

$$\lambda = 1 + (\lambda_0 - 1)^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$t \longrightarrow \infty \Rightarrow \lambda = 1$$

$$t \longrightarrow 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_0$$



بهتر است از روش RLS معمولی، چونکه تغییرات پارامترها را نمی دانیم کی اتفاق می افتد. (یک روش میانی)

۴ـ روش تطبیقی : باید به ϵ وابسته شود.

$$\lambda_t = \frac{f_{t-1}}{f_t}$$

$$f = f_{t-1} + k\hat{v}_t^2$$

Subject
Date

$$f_t = f_{t-1} + k\,v_t^2$$ علامت مهم نیست

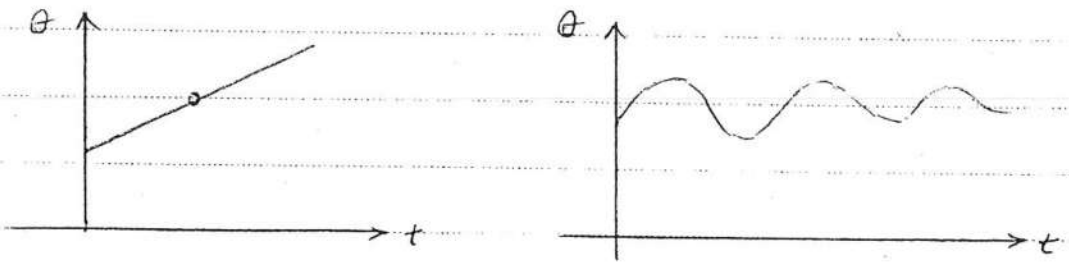
- تخمین خطا $\hat{v}_t = y_t - u_t^T \cdot \hat{\theta}_{t-1}$

برای $\hat{e}_t = \hat{v}_t \longrightarrow 0 \Longrightarrow f_t \cong f_{t-1} \Longrightarrow \lambda \to 1$

برای $\hat{e}_t = \hat{v}_t$ بزرگ‌تر $\Longrightarrow f_t > f_{t-1} \Longrightarrow \lambda \downarrow < 1$

در این روش k بصورت سعی و خطا تعیین می‌شود.

۵. مشخص بودن نحوه تغییر پارامتر (کاربردی نیست)



$$\theta_t = f(\theta_{t-1})$$

تخمین حالت، کالمن، سمینارها جزء امتحان نیست

این مطالب فصل ۱۰ بود.

فصل ۹ کامل هست.

Subject
Date

فصل ۹ : تعیین درجه و ارزیابی مدل .

مجهولات یک سیستم ⟵ تاخیر ⟵ n, m, k

n : درجه صورت

m : درجه مخرج

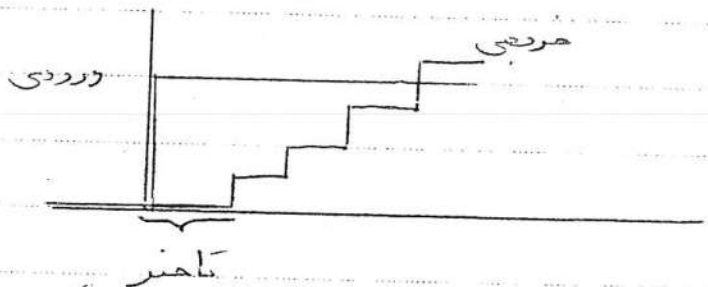
k : تابع تبدیل گسسته

مهمترین پارامتر n است .

با دانستن n معمولاً $m=n$ فرض می کنند .

درمدل نهایی ممکن است به $m \neq n$ برسیم

مقدار k یا تاخیر را باید تعیین کنیم با دیدن ورودی و خروجی



اثر انتخاب مناسب k روی شناسایی مدلی که دینامیک آن

به دینامیک سیستم اصلی شبیه تراست اثرگذار است .

k را می توان با مشاهده شکل ورودی و یا سعی بطور تقریبی انتخاب

نمود . روش دیگر سعی و خطا است و بررسی شبیه سازی ها برای

kهای مختلف .

Subject
Date

اصول مهم در تعیین درجه :

۱. اصل برازندگی ← نزدیک بودن پاسخ مدل و پاسخ سیستم اصلی. fitness

$$S = \sum \hat{e}_i^2$$

مدل برازنده‌تر = هرچه S کمتر باشد

نتیجه شناسایی براساس اصل برازندگی به تنهایی ممکن است منجر به مدلهای با مرتبه خیلی بالا شود.

۲. اصل ساده‌گرایی : تلاش برای انتخاب مدلهای با مرتبه پایین simplicity

مدلهای غیردقیق = نتیجه شناسایی براساس اصل ساده‌گرایی

اصل ساده‌گرایی ← $\hat{S}_{n=3} = 9$

اصل برازندگی ← $\hat{S}_{n=5} = 10$

مدل مناسب برازندگی و سادگی باهم.

Subject
Date

Akaika Information criterion (AIC)

$$(AIC)_n = N \log \hat{s}_n + k.P$$

- N: تعداد نمونه
- $\hat{s}_n$: شاخص عملکرد — مجموع مربعات خطا
- k: ضریب دلخواه
- P: تعداد پارامترهای مجهول

هرچه تعداد پارامترها بیشتر AIC بیشتر.

هدف اینست که AIC کم بشود

$n =$ مدل مرتبه 2 → s زیاد، P کم

$n =$ مدل مرتبه 5 → s کم، P زیاد

هرمدلی که AIC کمترشود انتخاب می‌کنیم.

	S_n	P	
k دلخواه	کوچک	زیاد	مدل مرتبه بالا
k را کوچک و بزرگ می‌کنیم	بزرگ	کم	مدل مرتبه پایین

سوال صفحه ۲۱۹ تمرین.

Subject

Date